代数学演義I (平成18年度前期) No.7 (5/30 出題分)

$\boxed{1}$ 2面体群 D_n は可解であることを示せ．また, D_n がべき零群になるのはどのようなときか?

$\boxed{2}$ G を有限群, $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を G の既約表現とする．このとき, $n^2|Z(G)| \leq |G|$ を示せ．ただし, $Z(G)$ は G の中心である．

$\boxed{3}$ A を可換環とする．$\mathrm{Spec}A$ は Zariski 位相に関し (擬) コンパクトであることを示せ．

$\boxed{4}$ $A \to B$ を可換環の整な射とする．このとき, $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ は閉射であることを示せ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{C}$ 代数準同型 $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[Y]$ がエタールなら同型であることを示せ．

$\boxed{6}$ 次のような L/K と $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ の例を与えよ．$L \supset K$ は体の無限次 Galois 拡大．$H \subsetneq \mathrm{Gal}(L/K)$ は真部分群．$K = \{x \in L \,|\, \sigma(x) = x, \forall\sigma \in H\}$.

$\boxed{7}$ $\mathbb{C}(X,Y,Z) \supset L \supset \mathbb{C}$ を体の拡大とし, $[\mathbb{C}(X,Y,Z) : L] = 2$ とする．この時, $L \cap \mathbb{C}[X,Y,Z]$ は $\mathbb{C}$ 代数として有限生成か?

$\boxed{8}$ 自明でない有限次既約表現を持たないような (非可換な) 群の例をあげよ．

$\boxed{9}$ G を有限群とするとき, G の既約表現の同値類の個数は G の共役類の個数に等しいことを示せ．

$\boxed{10}$ G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ の有限部分群とする．このとき, $xGx^{-1} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ をみたす $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ が存在することを示せ．

$\boxed{11}$ 群 G の単位元以外のすべての元の位数が 3 ならば G はべき零群であることを示せ．

$\boxed{12}$ 有限群 G の位数は奇数であるとする．このとき, G の既約指標で実数値をとるものは単位指標だけであることを示せ．

$\boxed{13}$ R を整域とする．R が整閉であるための必要十分条件は, R のすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ が整閉であることを示せ．

$\boxed{14}$ R を可換環とするとき, R のすべての素イデアルの共通部分は R のべき零元全体のなすイデアル $\sqrt{0}$ に等しいことを示せ．

$\boxed{15}$ p を素数とするとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての射影分解および入射分解を与えよ．

$\boxed{16}$ $\mathbb{R}[X,Y]$ の極大イデアルをすべて求めよ．