代数学演義I (平成18年度前期) No.6 (5/16 出題分)

$\boxed{1}$ 群の圏 **Grp** から集合の圏 **Ens** への共変関手 $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$ を,

$$F(G) = \{g \in G \,|\, g \text{ の位数は有限}\}$$

で定める．F は表現可能か?

$\boxed{2}$ 交代群 $A_n (n > 4)$ の任意の元 a は $a = xxyyxy (x, y \in A_n)$ と表せることを示せ.

$\boxed{3}$ G を有限アーベル群, $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ をその双対（有限アーベル群）とする．G 上の複素数値関数 $f : G \to \mathbb{C}$ に対してその台 $\mathrm{supp}(f) \subset G$, および Fourier 変換 $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$\mathrm{supp}(f) = \{g \in G | f(g) \neq 0\}, \qquad \widehat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) \quad (\chi \in \widehat{G})$$

で定める．$f \neq 0$ のとき不等式

$$|\mathrm{supp}(f)||\mathrm{supp}(\widehat{f})| \geq |G|$$

が成立することを示せ.

$\boxed{4}$ K を体, $G = \mathrm{GL}_n(K)$ とする．T を G の元で対角行列であるもの全体からなる G の部分群とする．このとき, 正規化部分群 $N_G(T)$ を求めよ.

$\boxed{5}$ G を有限群, χ を G の $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現 V の指標とする．このとき V の対称積 $\mathrm{Sym}^2(V)$ および交代積 $\wedge^2(V)$ の指標を求めよ.

$\boxed{6}$ G を有限群, $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ を G の位数 2 の指標, $H = \mathrm{Ker}(\chi)$ を χ の kernel とする．このとき, G の既約表現 V が H から誘導されるための必要十分条件は $V \otimes \chi \simeq V$ である．これを示せ.

$\boxed{7}$ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ は固有値がすべて 1 の行列で生成されることを示せ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{F}_p$ 上の一変数有理函数体 $\mathbb{F}_p(x)$ の整閉な部分環は体か PID であることを示せ.

$\boxed{9}$ $A = \mathbb{C}[X, Y, Z]$ を多項式環, $I = (ZX - Y^2, ZY - X^6, Z^2 - YX^5)$ をそのイデアルとする.

(1) I は素イデアルであることを示せ.

(2) $R = A/I$ とし, K をその商体とすると, $K \cong \mathbb{C}(t)$ を示せ.

(3) R' を R の K における整閉包とするとき, $\dim_{\mathbb{C}}(R'/R)$ を求めよ.

(4) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(R)$ を求めよ.

$\boxed{10}$ R が整閉整域ならば $R[X]$ も整閉整域であることを示せ.

$\boxed{11}$ 標数 0 の体 k は $a^2 = -1$ となる元 a を持つとする．体の拡大 $k \subseteq F \subseteq K$ があって $[F : K] < \infty$ とする．このとき, $\overline{k} \subseteq K$ なら $\overline{k} \subseteq F$ となっていることを示せ．ただし, $\overline{k}$ は k の代数閉包である.

$\boxed{12}$ 整数係数の n 次方程式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ の全ての根の絶対値が 1 であるならば, 根は 1 のべき根に限ることを示せ.

$\boxed{13}$ $\mathbb{Q}_p$ の 3 次拡大の $\mathbb{Q}_p$ 上の同型類の個数を求めよ.

$\boxed{14}$ $\mathbb{F}_2(x_1, \ldots, x_n)$ に対称群 $\mathfrak{S}_n$ を $x_1, \ldots, x_n$ の置換により作用させる. このとき, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ による不変体 $\mathbb{F}_2(x_1, \ldots, x_n)^{\mathfrak{A}_n}$ を求めよ.