代数学演義 I (平成18年度前期) No.5 (5/09 出題分)

$\boxed{1}$ **Ann** を可換環のなす圏とし, **Corp** を可換体のなす部分圏とする. A を可換環として, 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A,-) : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ を考え, これを **Corp** に制限したものを F とする. F が表現可能であるための必要十分条件を求めよ.

$\boxed{2}$ G を非可換単純群とし, $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ が $x\phi(x) = \phi(x)x$ $(\forall x \in G)$ を満たすとする. このとき, $\phi = \mathrm{id}$ を示せ.

$\boxed{3}$ p を素数とするとき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ の共役類の個数を求めよ.

$\boxed{4}$ p を素数とし, $q = p^f$ をそのべきとする. $g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$ をべき単元（つまり全ての固有値が 1 の元）とする. このとき, 任意の群準同型 $\rho : \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して, $\mathrm{tr}(\rho(g)) \in \mathbb{Z}$ かつ $\mathrm{tr}(\rho(g)) \equiv n \bmod p$ となることを示せ.

$\boxed{5}$ k を体とする. $P_1, P_2, \ldots, P_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ が共通零点を持たないとする. このとき, $\sum_{i=1}^m Q_i P_i$ が零点を持たないような $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ が存在することを示せ.

$\boxed{6}$ $(R, \mathfrak{m})$ を n 次元正則局所環とする. $\mathfrak{m}$ が R 加群として平坦であるための必要十分条件は $n \leq 1$ であることを示せ.

$\boxed{7}$ Abel 群 M を $\mathbb{Z}$ 加群とみるとき, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$ となるための必要十分条件は M のすべての元が位数有限であることである. これを示せ.

$\boxed{8}$ R を整域とするとき, R の商体 Q は R 加群として injective であることを示せ.

$\boxed{9}$ k を体, $R = k[x]/(x^n)$ とする. 有限生成 R 加群 M について次の条件はすべて互いに同値であることを示せ.

(1) M は R 自由加群.

(2) M は R 射影加群.

(3) M は R 入射加群.

$\boxed{10}$ 局所整域 R で完備化 $\hat{R}$ が整域でないようなものの例を挙げよ.

$\boxed{11}$ $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ とするとき, R の乗法群 $R^\times$ を求めよ.

$\boxed{12}$ p, q を互いに素な自然数とする. このとき, $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群によって移りあう代数的数 α, α' で $|\alpha| \neq 0, 1$ かつ $|\alpha|^{p/q} = |\alpha'|$ を満たすものが存在することを示せ.

$\boxed{13}$ $f(x)$ を有理数係数 d 次既約多項式とする. $f(x)$ は解 α, β で α/β が原始 n 乗根になるものを持つとする. このとき, $\varphi(n) \leq d$ を示せ. ただし φ は Euler 函数である.

$\boxed{14}$ Puiseux 級数体 K を $K = \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((x^{1/n!}))$ で定義するとき, K は代数的閉体であることを示せ.

$\boxed{15}$ p を素数, ζ_{4p} を 1 の原始 $4p$ 乗根とするとき, $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{4p})$ を示せ.