代数学演義I (平成18年度前期) No.4 (5/02 出題分)

$\boxed{1}$ 小さい圏の圏 **Cat** から集合の圏 **Ens** への関手 $O\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Ens}$ を, $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ で定義する. O の左随伴関手と右随伴関手を求めよ.

$\boxed{2}$ G を有限群, H を G の部分群とする. G-**Mod**, H-**Mod** をそれぞれ G-加群の圏, H-加群の圏とする. G-加群の G-作用を H に制限することによって H-加群とみなすことにより得られる関手 $F : G\text{-}\mathbf{Mod} \to H\text{-}\mathbf{Mod}$ の右随伴関手はどのようなものか？

$\boxed{3}$ p を素数とする. フィボナッチ数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$ を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ で考える. この時, 数列の循環節の長さ, 即ち十分大きな任意の n について $a_{n+l} = a_n$ なる最小の $l > 0$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 位数 48 の有限群 G が，次の条件 (A) を満たす二つの部分群 U と V で生成されているとする：

(A) U は D_3 に，V は D_2 に同型で，$U \cap V$ の位数は 2.

このとき，G は $\mathfrak{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に同型であることを示せ.

$\boxed{5}$ p を素数とする．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ は位数 $p^n - 1$ の元を持つことを示せ.

$\boxed{6}$ 各辺が 3,4,5 であるものの他に, すべての辺が有理数で面積が 6 である直角三角形を二つ見つけよ.

$\boxed{7}$ a_1, a_2, a_3, $a_4 \in \mathbb{Q}_p^\times$ とする. 任意の $c \in \mathbb{Q}_p$ に対して

$$c = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$$

を満たす x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{Q}_p$ が存在することを示せ.

$\boxed{8}$ a_1, a_2, a_3, a_4 を正の有理数とする. 任意の正の有理数 c に対して

$$c = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$$

を満たす x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ.

$\boxed{9}$ $\zeta_n \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 n 乗根とする．$\mathbb{Q}(\zeta_n) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_m)$ が体になるのはどのようなときか?

$\boxed{10}$ 次の多項式の $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 上の Galois 群を求めよ．また，これらの多項式の $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}$ 上 G alois になるか？

(1) $x^2 - (1 + 2\sqrt{-3})$
(2) $x^3 - (1 + \sqrt{-3})$
(3) $x^3 + 10 - 9\sqrt{-3}$

$\boxed{11}$ k を体とする．行列環 $\mathrm{M}_n(k)$ の部分集合 A に対してその交換団 (commutant) A' を

$$A' = \{b \in M_n(k) \,|\, ab = ba \text{ for all } a \in A\}$$

で定める．任意の行列 $a \in M_n(k)$ に対してその再交換団 $\{a\}''$ は，k 上 a で生成される $M_n(k)$ の部分環に一致することを示せ.

$\boxed{12}$ Aを可換環とし，$f \in A$を非零因子とする．$\hat{A}$をAの(f)-adic 完備化とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) MをA加群とし，任意の$x \in M$に対しある$n > 0$が存在して$f^n \cdot x = 0$となるとする．このとき，自然な射$M \to \hat{A} \otimes_A M$は同型であることを示せ．

(2) Nを$\hat{A}$加群とし，fはN正則（すなわち、$y \in N, f \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$）とする．このとき，$\mathrm{Tor}_1^A(\hat{A}, N_f/N) = 0$を示せ．

$\boxed{13}$ k を可換体とするとき, $k[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_1x_2 - x_3x_4)$ はUFDか？

$\boxed{14}$ k を可換体, $R = k[[x, y]]$ とする． k を $R/(x, y) \simeq k$ により R-加群とみるとき, $\mathrm{Tor}_i^R(k, k)$ $\mathrm{Ext}_R^i(k, k)$ を求めよ．

$\boxed{15}$ R を Noether 環, M, N を有限生成 R 加群とする． R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ と任意の自然数 n に対して $M/\mathfrak{m}^nM$ と $N/\mathfrak{m}^nN$ が R-加群として同型ならば M と N は R-加群として同型であるといえるか？