# 代数学演義I (平成18年度前期) No.3 (4/25 出題分)

$\boxed{1}$ 群の圏 $\mathbf{Grp}$ から可換群の圏 $\mathbf{Ab}$ への関手 $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ で, 各群 $G$ について $F(G)$ が $G$ の中心であるものは存在しないことを示せ.

$\boxed{2}$ $n$ を自然数, $\varphi$ を Euler 函数とする. $(n, \varphi(n)) = 1$ ならば位数 $n$ の群 $G$ は可換であることを示せ.

$\boxed{3}$ $p$ を素数とするとき $p$ 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ の部分群 $H$ で $[\mathfrak{S}_p : H] = p$ となるものを全て求めよ.

$\boxed{4}$ $k$ を体とする. 行列環 $\mathrm{M}_n(k)$ の $k$ 上の環自己同型 $\sigma$ に対し,

$$\sigma(a) = gag^{-1}, \qquad {}^{\forall}a \in \mathrm{M}_n(k)$$

となる $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ が存在することを示せ.

$\boxed{5}$ 複素数列の全体 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, すなわち自然数 $\mathbb{N}$ 上の複素数値関数の全体を各点ごとの演算で環と見る. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C})$ を決定せよ.

(2) $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}$ が $\mathbb{C}$ に同型でない例を与えよ.

$\boxed{6}$ $\mathbb{Q}$ 上の 7 次の既約多項式 $f(X)$ で可解でないものを構成せよ.

$\boxed{7}$ $K$ を環 $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - X^5 + 1)$ の商体とするとき $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K)$ を決定せよ.

$\boxed{8}$ $k = \mathbb{F}_p((t))$ の多項式 $f(x) = x^2 + tx + t$ は既約であることを示せ。また, $K$ を $f(x)$ の分解体とするとき $K$ から $k$ への同形写像を構成せよ.

$\boxed{9}$ $k$ を標数 2 でない体, $K = k[[x]]$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in k[[x]]$ は $K$ において平方根を持つことを示せ.

(2) $p$ を奇素数とすると $\mathbb{F}_p((x))$ の二次拡大体は $\mathbb{F}_p((x))$ 上の同型を除いて 3 つしかないことを示せ.

$\boxed{10}$ $k = \mathbb{F}_2((x))$ は $k$ 上相異なる二次拡大体を無限個持つことを示せ.

$\boxed{11}$ $K = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}{\cdot}i \oplus \mathbb{Q}{\cdot}j \oplus \mathbb{Q}{\cdot}k$ を, $\mathbb{Q}$ に $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ という関係式をもつ元 $i$, $j$, $k$ を添加して得られる非可換な環とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $K$ は斜体であることを示せ.

(2) $p$ を奇素数とするとき $K$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ と同型な体を含むための必要十分条件は $p \not\equiv 7 \bmod 8$ であることを示せ.

$\boxed{12}$ 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の $n$ 次の monic な既約多項式の個数を求めよ.

$\boxed{13}$ 拡大次数 $[\mathbb{Q}_p(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}_p]$ を求めよ.

$\boxed{14}$ 可換環 $R$ に対して $\mathrm{Spec}(R)$ を $R$ の素イデアル全体のなす集合とする. $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[X]$ および $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[X, Y]/(XY)$ はどのような集合か？

$\boxed{15}$ $R$ を可換環とするとき $R$ の素イデアルのうちで包含関係について極小なものが存在することを示せ.