代数学演義 I (平成 18 年度前期) No.2 (4/18 出題分)

$\boxed{1}$ **Set** を集合の圏, $A = \{0, 1\}$ とする. **Set** から **Set** への関手 F を

$$F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, A), A)$$

で定める. F は表現可能か？

$\boxed{2}$ G を有限生成の群, n を自然数とするとき, 次を示せ.

$$\sharp\{H \lhd G \text{ 正規部分群 } [G : H] \leq n\} < \infty.$$

$\boxed{3}$ 位数 8 の群を同型を除いて決定せよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\varphi : \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[t]$ を $\varphi(x) = t^2$, $\varphi(y) = t^3$ で定める. φ の核 $\mathrm{Ker}\varphi$ を求めよ.

$\boxed{5}$ イデアル類群が無限群になるような Dedekind 環は存在するか？

$\boxed{6}$ k を体とする。$f(X), g(X) \in k[X]$ として, $f(X)$ の次数を $d \geq 1$ とする. $f(h(X)) = g(X)$ を満たす $h(X) \in k[X]$ は高々 d 個であることを示せ.

$\boxed{7}$ $\mathbb{Q}$ の部分環はすべて PID であることを示せ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{F}_p$ 上の n 変数多項式環 $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ の部分環で Noether 環でないものは存在するか？

$\boxed{9}$ $k = \mathbb{Q}(t)$, $f(X) = X^{2n} - tX^n + 1 \in k[X]$ とする. k 上の $f(X)$ の最小分解体を K とするとき拡大次数 $[K : k]$ を求めよ.

$\boxed{10}$ 体 K を $f(X) = X^3 + X^2 - 4X + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とするとき, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{11}$ n を自然数, k を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とするとき, k の Galois 拡大 K で $\mathrm{Gal}(K/k)$ が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型になるようなものが存在することを示せ.

$\boxed{12}$ $\mathbb{Q}$ に 2 のベキ根 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\cdots$ をすべて付け加えた体の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包を K とするとき, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{13}$ n を自然数, $K = \mathbb{Q}(\tan(2\pi/n))$ とするとき, 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

$\boxed{14}$ 多項式 $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ を $\mathbb{F}_2$ 上で既約多項式の積に分解せよ.

$\boxed{15}$ $\mathbb{R}$ の自己同型は自明なものに限ることを示せ.