代数学演義I (平成18年度前期) No.1 (4/11 出題分 4/12 修正)

$\boxed{1}$ p を素数とするとき, $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^2+x+1)$ とおく. R が体になるのは素数 p がどのような条件を満たすときか？　また、R が体でないとき R はどのような環か？

$\boxed{2}$ A を Dedekind 環とするとき A 上の有限生成射影加群はイデアルの直和であることを示せ.

$\boxed{3}$ n を自然数, p を素数とするとき $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ の元 X の位数が p ベキであるための必要十分条件は X の固有値がすべて 1 であることである. これを示せ.

$\boxed{4}$ p を奇素数とするとき, $\sharp\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{F}_p^4 \,|\, x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ を求めよ.

$\boxed{5}$ n を任意の自然数とするとき $\mathbb{Q}$ 上 n 次の Galois 拡大が存在することを示せ.

$\boxed{6}$ p を素数とするとき, p 進体 $\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{R}$ と同型でないことを示せ.

$\boxed{7}$ 絶対値が 1 の代数的整数で 1 のベキ根でないものは存在するか？

$\boxed{8}$ p を素数とするとき $\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p$ の Galois 群を求めよ. ここで $\bar{\mathbb{F}}_p$ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉包である.

$\boxed{9}$ $n>1$ を自然数とするとき $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の自己同型群と同一視して自然に作用させる. このとき半直積 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\rtimes(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の共役類の個数を求めよ.

$\boxed{10}$ **Group**, **Ring** をそれぞれ群, (単位元を持つ) 環のなす圏とする. $R\in\mathrm{Ob}(\textbf{Ring})$ に対して乗法群 $R^\times\in\mathrm{Ob}(\textbf{Group})$ を対応させる関手の左随伴関手を求めよ.

- $\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を表す.