Fourier 解析

重川 一郎

平成 23 年 4 月 8 日

目 次

第1章　L^p 空間

1.　Banach 空間

$K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする．以下 K 上でベクトル空間を考える．

定義 1.1. V を K 上のベクトル空間とする．$x \in V$ に対して非負値 $\|x\|$ が定義され，次の性質を満たすとき $\|\|$ をノルムと言う．

(N1) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

(N2) $x, y \in V$ に対して $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(N3) $\alpha \in K, x \in V$ に対して $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

ノルムの定義された空間を**ノルム空間**と呼ぶ.

注意 1.1. (N1) で $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ が成立しないときは $\|\ \|$ は半ノルム (seminorum) と呼ばれる.

$\|\ \|$ がノルムのとき $d(x, y) = \|x - y\|$ は距離になる．ノルム空間は，この距離により距離空間になる．ノルム空間はこの位相が与えられているとする．

定義 1.2. ノルム空間 V が，距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ に関して完備であるとき **Banach 空間**であるという.

命題 1.3. $(V, \|\ \|_V), (W, \|\ \|_W)$ をノルム空間とする．線型写像 $T \colon V \to W$ に対して，次の条件は同値である.

(1) T は V 上連続.

(2) T は 原点で連続.

(3) T は有界．すなわちある $c > 0$ が存在して，すべての $x \in V$ に対し $\|Tx\|_W \leq c\|x\|_V$.

このとき $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_W; \|x\|_V \leq 1\}$ を作用素ノルムという.

V から W への連続線形写像全体はベクトル空間をなし，上の作用素ノルムはノルムになっている．特に $W = K$ のときは，線形汎関数と呼ぶ．V 上の連続線型汎関数全体を V の双対空間と呼び，V^* とかく.

定理 1.4. V をノルム空間とするとき，V^* はノルム $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\}$ で Banach 空間になる.

2. L^p 空間

以下では測度空間 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ が与えられているとする．

定義 2.1. (1) $1 \leq p < \infty$ に対し

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \{f;\ f \text{ は可測で } |f|^p \text{ が可積分}\}$$

とおく．さらに $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ に対して

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}$$

と定める．

(2) $f \colon X \to \mathbb{C}$ を可測関数とし，

$$\|f\|_\infty = \inf\{a;\ \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0\}$$

と定義する．$\|f\|_\infty$ を $|f|$ の本質的上限という．さらに

$$\mathscr{L}^\infty(X, \mu) = \{f;\ \|f\|_\infty < \infty\}$$

とおく．

命題 2.2. (1) $1 \leq p,\ q \leq \infty$ が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ をみたすとする．このとき $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$, $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$ ならば $fg \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ で

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{2.1}$$

が成立する．

(2) $f,\ g \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ ならば $f + g \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ であり，

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{2.2}$$

証明 $1 < p, q < \infty$ のときだけ証明する．まず，任意の $a,\ b \geq 0$ に対し

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.3}$$

に注意する．また $A = \|f\|_p$, $B = \|g\|_q$ とおく．$A = 0$ または $B = 0$ の場合は明らかだから，$AB > 0$ の場合を考える．$a = \frac{|f(x)|}{A}$, $b = \frac{|g(x)|}{B}$ として (2.3) を使えば

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{B^q}$$

両辺を積分して

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)|, d\mu}{AB} \le \frac{1}{p}\frac{\|f\|_p^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\|g\|_q^q}{B^q} = 1.$$

これから求める結果が得られる．

(2) $|f+g| \le |f| + |g|$ だから $f,\, g$ の代わりに $|f|,\, |g|$ を考えれば $f,\, g \ge 0$ としても一般性を失わない.

$1 < p < \infty$ のときだけ証明する．

$$(f+g)^p \le 2^p \max\{f^p, g^p\} \le 2^p(f^p + g^p)$$

であるから $f+g \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ である．また不等式 (2.1) を使えば

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)^p\,d\mu &= \int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1}\,d\mu \\ &\le \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q.\end{aligned}$$

ここで $(p-1)q = p$ に注意すれば

$$\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p \|f+g\|_q^{p/q} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}.$$

従って

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

あとは $p - \frac{p}{q} = 1$ に注意すれば求める結果を得る． □

$f,\, g \in \mathscr{L}^p(X, d\mu)$ に対して同値関係 $f \sim g$ を $f = g$ μ-a.e. で定める．そして $L^p(X,\mu) = \mathscr{L}^p(X,\mu)/\sim$ で空間 $L^p(X,\mu)$ を定める．この空間を L^p 空間という．また $F \in L^p(X,\mu)$ に対し F の代表元 f をとって $\|F\|_p = \|f\|_p$ で定める．$L^p(X,\mu)$ の元は同値類であるが，その代表元 f と同一視し，関数のように扱う.

関数列の収束

関数列 $\{f_n\}$ に対し次の 3 つの収束を導入する．

(1) $f_n \to f$ a.e. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu(\{x;\, f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$

(2) $f_n \to f$ in measure $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0$: $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0.$

(2) $f_n \to f$ in L^p $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|f_n - f\|_p \to 0.$

これらの関係を述べておこう.

定理 2.3. (1) $f_n \to f$ a.e., $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in measure.

(2) $f_n \to f$ in $L^p \Rightarrow f_n \to f$ in measure.

(3) $f_n \to f$ in measure $\Rightarrow \exists\{f_{n_j}\}$: a subsequence s.t. $f_{n_j} \to f$ a.e.

補題 2.4. (Chebyshev inequality) $0 < p < \infty$ に対し

$$\mu(|f| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p}\|f\|_p^p.$$

証明

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|\geq\alpha\}} |f|^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(|f| \geq \alpha)$$

□

補題 2.5. (Borel-Cantelli lemma) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$. 但し $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} A_m$

証明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} d\mu$$

であるから $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ から $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} < \infty$ a.e. が分かる．これは $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$ を意味する． □

定理 2.3 の証明

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ を書き直せば

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall k \geq m\colon |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$
$$x \in \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \{|f_k - f| \leq \frac{1}{n}\}$$

$f_n \to f$ a.e. より

$$\mu(\bigcup_n \bigcap_m \bigcup_{k\geq m} \{|f_k - f| > \frac{1}{n}\}) = 0$$
$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}\colon \mu(\bigcap_m \bigcup_{k\geq m} \{|f_k - f| > \frac{1}{n}\}) = 0.$$

ここで $\forall\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > \frac{1}{n}$ となる n をとれば

$$\mu(\bigcap_m \bigcup_{k\geq m} \{|f_k - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

ここで $A_m = \bigcup_{k\geq m}\{|f_k - f| > \varepsilon\}$ とおけば $A_m \downarrow \bigcap_m \bigcup_{k\geq m}\{|f_k - f| > \varepsilon\}$ だから，$\mu(X) < \infty$ から $\mu(A_m) \to 0$ が成り立つ．ところで

$$\mu(|f_m - f| \geq \varepsilon) \leq \mu(A_m)$$

だから $\mu(|f_m - f| \geq \varepsilon) \to 0$ が従う．

(2) Chebyshev の不等式から，$n \to \infty$ のとき

$$\mu(|f_m - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\|f_n - f\|_p^p \to 0$$

(3) 条件から部分列 $\{f_{n_j}\}$ を

$$\mu(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \leq \frac{1}{2^j}$$

となるようにとる．$A_j = \{|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\}$ とおくと $\sum_j \mu(A_j) < \infty$ だから Borel-Cantelli lemma より $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$ となる．a.e. で，j が十分大きければ $|f_{n_j} - f| < \frac{1}{j}$ を意味するから $f_{n_j} \to f$ a.e. が成立する． □

次に $L^p(X, \mu)$ の完備性を示す．

定理 2.6. $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき $L^p(X, \mu)$ は Banach 空間になる．

証明 完備性を示す必要がある．$\{f_n\}$ を Cauchy 列とする．収束する部分列が取れることを示せばよい．必要なら部分列をとって $m > n$ のとき

$$\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

が成り立つように出来る．$A_n = \{|f_n - f_{n+1}| \geq \frac{1}{n^2}\}$ とおくと Chebyshev の不等式より

$$\mu(A_n) \leq n^{2p}\|f_n - f_{n+1}\|_p^p \leq \frac{n^{2p}}{2^{np}}.$$

よって

$$\sum_n \mu(A_n) \leq n^{2p}\|f_n - f_{n+1}\|_p^p \leq \sum \frac{n^{2p}}{2^{np}} < \infty.$$

Borel-Cantelli lemma より，a.e. で十分大きな n に対し

$$|f_n - f_{n+1}| < \frac{1}{n^2}$$

が成り立つので

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}| < \infty.$$

これから $\{f_n\}$ は a.e. で収束することが分かる．$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ とおく（収束しない点では $f=0$ とする).

最後に f_n が f に L^p 収束することを示そう．Fatou lemma から

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p < \infty.$$

これで $f \in L^p(X,\mu)$ が分かる．再び Fatou lemma から

$$\begin{aligned}\int_X |f-f_m|^p \, d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n - f_m|^p \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu \\ &\le \varliminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p^p \le \sup_{n\ge m} \|f_n - f_m\|_p^p \le \frac{1}{2^m}.\end{aligned}$$

よって

$$\varlimsup_{m\to\infty} \int_X |f-f_m|^p \, d\mu \le \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} = 0.$$

これで $\{f_n\}$ が f に収束することが示せた． □

3. Hilbert 空間

H を K 上のベクトル空間とする．

定義 3.1. $H \times H$ から K への写像 $(\,,)$ が次の条件を満たすとき内積という．

(1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$, α, $\beta \in K$, $x, y, z \in H$.

(2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

(3) $(x,x) \ge 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

内積 (,) に対して $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ と定義する．$\|\ \|$ がノルムになることを示そう．

命題 3.2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

証明

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = |\alpha|^2 \|x\|^2.$$

□

定理 3.3. (Cauchy-Schwarz inequality) 次の不等式が成立する．

$$|(x,y)| \le (x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} \tag{3.1}$$

証明

$$0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = (\lambda x + y, \lambda x + y) = |\lambda|^2 (x, x) + 2\Re(\lambda x, y) + (y, y).$$

$x = 0$ のとき，(3.1) は明らか．$x \neq 0$ のとき，$\lambda = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$ とおくと

$$0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - 2\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y, y) = -\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y, y).$$

これから (3.1) が得られる． □

定理 3.4. $\| \ \| = (\ , \ )^{1/2}$ はノルムになる．

証明 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ だけ示せばよい．

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &\leq (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + 2\Re(x, y) + (y, y) \\ &\leq (x, x) + 2(x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} + (y, y) = \{(x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2}\}^2 = \{\|x\| + \|y\|\}^2.\end{aligned}$$

□

定義 3.5. 内積 $(\ , \ )$ が定義され，ノルム $\| \ \| = (\ , \ )^{1/2}$ が完備なベクトル空間を **Hilbert 空間**という．

$L^2(X, \mu)$ は $(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu$ で Hilbert 空間になる．

定義 3.6. 内積空間において $(x, y) = 0$ が成り立つとき，x と y は直交するといい，$x \perp y$ とかく．

定理 3.7. (The Pythagorean Theorem) $x \perp y$ ならば $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

定理 3.8. (The parallelogram law) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$A \subseteq H$ に対し

$$A^{\perp} = \{y; \, (x, y) = 0, \ \forall x \in A\} \tag{3.2}$$

と定義する．

定理 3.9. F を Hilbert 空間 H の閉部分空間とする．任意の $x \in H$ は $x = y + z$, $y \in F$, $z \in F^{\perp}$ と一意的に表現される．

証明 $c = \inf \|\|x - y\|; y \in F\}$ とし $y_n \in F$ を $\|x - y_n\| \downarrow c$ ととる．定理 3.8 を $y_n - x$, $y_m - x$ に用いて

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2.\end{aligned}$$

ここで $\frac{y_n+y_m}{2} \in F$ より，$|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq c$ であるから

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4c^2 \to 0 \quad (\text{as } n,\, m \to \infty).$$

よって $\{y_n\}$ は Cauchy 列であるから，収束する．$y_n \to y$ とし，$z = x - y$ とおく．F は閉集合であるから $y \in F$ であり，また $\|z\| = c$ も成り立つ．$z \perp F$ を示す．もし $(x,w) \neq 0$ となる $w \in F$ が存在したとする．$\beta = \alpha(z,w)$ $\alpha > 0$ とおく．

$$\begin{aligned}\|x - (y + \beta w)\|^2 &= \|z - \beta w\| = \|z\|^2 - (z, \beta w) - (\beta w, z) + |\beta|^2\|w\|^2 \\ &= \|z\|^2 - \alpha\overline{(z,w)}(z,w) - \alpha(z,w)(w,z) + \alpha^2|(z,w)|^2\|w\|^2 \\ &= \|z\|^2 - 2\alpha|(z,w)|^2 + \alpha^2|(z,w)|^2\|w\|^2 \\ &= c^2 - \alpha|(z,w)|^2(2 - \alpha\|w\|)^2.\end{aligned}$$

α を小さくとって $2 - \alpha\|w\| > 0$ となるようにすると，右辺は c^2 より小さくなる．ところが $y + \beta w \in F$ だから，これは c の定め方に矛盾する．従って $z \perp F$ である．

次に分解の一意性を示す．

$$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$$

と二通りにかけたとする．すると $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$ なので，$y = \tilde{y},\, z = \tilde{z}$ となる． □

Hilbert 空間上の線型汎関数

$\varphi\colon H \to K$ が次を満たすとき線型汎関数という．

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad \alpha, \beta \in K, x, y \in H.$$

特に H 上の連続な線型汎関数全体を H^* とかき双対空間という．φ が連続であるための必要十分条件は，ある定数 $c > 0$ が存在して $|\varphi(x)| \leq c\|x\|$ であった．

定理 3.10. (Riesz-Fréchet)

$$\varphi \in H^* \Leftrightarrow \exists! h \in H \text{ s.t. } \varphi(x) = (x, h).$$

証明　($\Rightarrow$) を示す．$\varphi = 0$ のときは明らかだから $\varphi \neq 0$ とする．

$$F = \{x \in H; \varphi(x) = 0\}$$

とする．$v \notin F$ をとり，$v = y + z,\, y \in F,\, z \in F^{\perp}$ と表される．$z \notin F$ より $\varphi(z) \neq 0$. $u = \frac{z}{\varphi(z)}$ とおくと $\varphi(u) = 1$ で $u \in F^{\perp}$.

さて，任意の $x \in H$ に対して $x - \varphi(x)u \in F$ だから，$u \in F^{\perp}$ に注意して

$$(x - \varphi(x)u, u) = 0$$

これから

$$\varphi(x) = \frac{(x,u)}{(u,u)}$$

と表現できる． □

命題 3.11. (X,μ) を有限測度空間とする．このとき $1 \le r < s \le \infty$ ならば $L^s(X,\mu) \subseteq L^r(X,\mu)$ で埋め込みは連続である．

証明 $s=\infty$ のときは容易だから $s<\infty$ のときを示す．$p=\frac{s}{r}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ と定める．Hölder の不等式から

$$\int_X |f|^s\,d\mu = \int_X |f|^s \cdot 1\,d\mu \le \left\{\int_X (|f|^s)^p\,d\mu\right\}^{1/p}\left\{\int_X 1^q\,d\mu\right\}^{1/q} = \|f\|_s^{s/p}\mu(X)^{1/q}.$$

よって

$$\|f\|_r \le \|f\|_s^{s/pr}\mu(X)^{1/qr}.$$

ここで

$$\frac{s}{pr} = \frac{s}{\frac{s}{r}r} = 1, \quad \frac{1}{qr} = \frac{1}{\frac{p}{p-1}r} = \frac{p-1}{pr} = \frac{\frac{s}{r}-1}{\frac{s}{r}r} = \frac{1}{r}-\frac{1}{s}$$

に注意すれば

$$\|f\|_r \le \|f\|_s \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}.$$

□

Radon-Nikodym の定理

可測空間 $(X,\mathscr{B})$ に二つの測度 μ, ν が与えられているとする．

定義 3.12. ν が μ に対して絶対連続である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu(A)=0$ ならば $\nu(A)=0$ である．
これを $\nu \prec \mu$ とかく．
また ν と μ が互いに特異 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists A$ s.t. $\mu(A)=0, \nu(X\setminus A)=0$.
このとき $\nu \perp \mu$ とかく．

例えば $f \ge 0$ を与えて

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$

と定義すれば，$\nu \prec \mu$ である．この逆が成立する．

定理 3.13. (Lebesgue 分解) μ, ν を二つの σ-有限な測度とする．ν は次のように一意的に分解される：$\nu = \nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}$, $\nu_{\mathrm{ac}} \prec \mu$, $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$.

証明 μ, ν が有限測度のときに示せばよい．次の埋め込みの列は連続になる．

$$L^2(X,\mu+\nu) \subset L^2(X,\nu) \subset L^1(X,\nu).$$

ここで写像 $L^1(X,\nu) \ni f \mapsto \int_X f\,d\nu$ を考えれば，これは $L^2(X,\mu+\nu)$ 上の線型汎関数である．よって定理 3.10 から $\exists g \in L^2(X,\mu+\nu)$

$$\int_X f\,d\nu = \int_X fg\,d(\mu+\nu)$$

よって

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d(\mu+\nu) - \int_X f\,d\nu = \int_X (f - fg)\,d(\mu+\nu) = \int_X f(1-g)\,d(\mu+\nu).$$

μ, ν の正値性から $g \geq 0$, $1-g \geq 0$ である．$A = \{x; g(x) = 1\}$, $B = X \setminus A$, $f = 1_A$ として

$$\mu(A) = \int_X 1_A\,d\mu = \int_X 1_A(1-g)\,d(\mu+\nu) = 0.$$

ここで

$$\nu_{\mathrm{ac}}(E) = \nu((E \cap B), \quad \nu_{\mathrm{s}}(E) = \nu((E \cap A)$$

と定義する．$\nu = \nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}$ および $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$ は明らか．$\nu_{\mathrm{ac}} \prec \mu$ を示そう．B のなかで考えればよい．$E \subseteq B$ が $\mu(E) = 0$ を満たせば

$$0 = \mu(E) = \int_X 1_E\,d\mu = \int_X 1_E(1-g)\,d(\mu+\nu)$$

B 上では $1-g > 0$ だから $(\mu+\nu)(E) = 0$. 特に $\nu(E) = \nu_{\mathrm{ac}}(E) = 0$. 以上で $\nu_{\mathrm{ac}} \prec \mu$ が示せた．

最後に一意性を示そう．$\nu = \rho + \sigma$, $\rho \prec \mu$, $\sigma \perp \mu$ と分解できたとする．上記の分解から

$$\begin{aligned}\nu_{\mathrm{s}} &= \nu(E \cap A) \\ &= \sigma(E \cap A) \quad (\because \mu(A) = 0, \rho \prec \mu) \\ &\leq \sigma(E).\end{aligned}$$

これから $\nu_{\mathrm{s}} \leq \sigma$, $\rho \leq \nu_{\mathrm{ac}}$. よって $\sigma - \nu_{\mathrm{s}} = \nu_{\mathrm{ac}}$ は測度となり，μ に関して絶対連続かつ特異だから 0 になる． □

定理 3.14. (Radon-Nikodym)　μ, ν を二つの σ-有限な測度とする．このとき $\nu \prec \mu$ ならば $f \geq 0$ が存在して

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$

証明　定理 3.13 と同じ記号を使う．$\nu = \nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}$ と分解されるが条件から $\nu_{\mathrm{s}} = 0$ である．ここで

$$h = \begin{cases} \dfrac{g}{1-g} & \text{on } B \\ 0 & \text{on } A \end{cases}$$

と定めると,

$$\int_E h\,d\mu = \int_X 1_E 1_B \frac{g}{1-g}(1-g)\,d(\mu+\nu) = \int_{B\cap E} g\,d(\mu+\nu)$$
$$= \int_{B\cap E} g\,d\nu = \nu(B\cap E) = \nu(E).$$

これで存在が示せたので一意性を示す.

$$\nu(E) = \int_E h\,d\mu = \int_E j\,d\mu$$

とする. $E_1 = \{j > h\}$, $E_2 = \{j < h\}$ とおく.

$$\int_{E_1} h\,d\mu = \int_{E_1} j\,d\mu$$

より

$$\int_{E_1} (j-h)\,d\mu = 0.$$

ところで E_1 上で $j - h > 0$ だから $\mu(E_1) = 0$ である. 同様に $\mu(E_2) = 0$ もいえるから, $j = h$ a.e. □

上の証明中の h を Radon-Nikodym derivative (or density) と呼び, $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ とかく.

定理 3.15. μ, ν を二つの σ-有限な測度とし, ν はさらに有限であるとする. このとき次の二つは同値.

(i) $\nu \prec \mu$

(ii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.t. $\mu(A) \le \delta \ \Rightarrow\ \nu(A) \le \varepsilon$.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (i) は容易だから逆を示そう. 定理 3.14 から

$$\nu(A) = \int_A g\,d\mu$$

と表される. ν が有限測度だから $g \in L^1(d\mu)$ である. $\varepsilon > 0$ に対し N を大きくとって

$$\int_{\{g>N\}} g\,d\mu \le \varepsilon$$

とできる. そこで $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ とおけば, $\mu(A) \le \delta$ のとき

$$\nu(A) = \int_{A\cap\{g>N\}} g\,d\mu + \int_{A\cap\{g\le N\}} g\,d\mu \le \varepsilon + \int_{A\cap\{g\le N\}} N\,d\mu \le \varepsilon + \mu(A)N \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{N}N = 2\varepsilon.$$

これで (ii) が示せた. □

4.　符号付測度

定義 4.1. $(X,\mathscr{B})$ を可測空間とする．$\mu\colon \mathscr{B}\to(-\infty,\infty]$ (または $[-\infty,\infty)$) は符号付測度である $\overset{\text{def}}{\iff}$

(1) $\mu(\emptyset)=0$,

(2) A_n が互いに素のとき $\mu(\cup A_n)=\sum\mu(A_n)$.

正値性を仮定すれば測度である．符号付測度は正の測度の差にかけることを示していく．

定理 4.2. (Hahn-Jordan 分解)　μ を符号付測度とする．このとき次をみたす集合 D が存在する : $\mu_+(E)=\mu(E\cap D)\geq 0$, $\mu_-(E)=-\mu(E\setminus D)\geq 0$. 従って $\mu=\mu_+-\mu_-$, $\mu_+\perp\mu_-$. 逆にこの性質は μ_+, μ_- を一意的に定め

$$\mu_+(E)=\sup\{\mu(G);\,G\subseteq E\},\quad \mu_-(E)=-\inf\{\mu(G);\,G\subseteq E\}. \tag{4.1}$$

証明　$(-\infty,\infty]$ に値をとる場合を考える．$k=\inf\{\mu(E);\,E\in\mathscr{B}\}$ とおく．

<u>claim 1</u> $\mu(C)=k$ となる C が存在する．

$\because$ $\exists\{E_n\}\subseteq\mathscr{B}$ s.t. $\mu(E_n)=k_n\downarrow k$. そこで $A_1=E_1$ とおき

$$A_2=\begin{cases}A_1\cup E_2 & \text{if } \mu(E_2\setminus A_1)<0\\ A_1 & \text{if } \mu(E_2\setminus A_1)\geq 0\end{cases}$$

と定める．以下帰納的に

$$A_{n+1}=\begin{cases}A_n\cup E_{n+1} & \text{if } \mu(E_{n+1}\setminus A_n)<0\\ A_n & \text{if } \mu(E_{n+1}\setminus A_n)\geq 0\end{cases}$$

と定める．すると $\mu(E\backslash A_n)\geq 0$ となる．これは上の定め方で，一番目の場合は $E_{n+1}\backslash A_{n+1})=\emptyset$ となり 2 番目の場合は $\mu(E_{n+1}\setminus A_{n+1})=\mu(E_{n+1}\setminus A_n)\geq 0$ となるからである．従って $\mu((E_n\cap A_n)\leq\mu(E_n)$ である．よって

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots,\quad \mu(A_1)\geq\mu(A_2)\geq\cdots$$

となる．$B_1=\cup A_n$ とおくと，

$$\mu(B_1)=\mu(A_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_{n+1}\setminus A_n)=\mu(A_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\mu(A_{n+1})-\mu(A_n)\}\leq k_1$$

また $E_n\cap A_n$ は B_1 の部分集合で $\mu(E_n\cap A_n)\leq k_n$. よって

$$\mu(B_1)\leq k_1,\quad \inf\{\mu(E);\,E\subseteq B_1\}=k$$

が成り立つ．従って k_1 より小さく，その部分集合で k に極限をもつ B_1 が構成で来た．

同じ議論で B_1 の部分集合で k_2 より小さく，その部分集合で k に極限をもつものが構成できる．これを繰り返すと減少列 $\{B_n\}$ で $\mu(B_n)$ も減少し，k に収束するものが取れる．どこかで $\mu(B_n) = k$ となれば $k > -\infty$ がいえる．すべての n で $\mu(B_n) > k$ であれば，$C = \cap_n B_n$ とおけば

$$\mu(C) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu(B_{j+1} \setminus B_j) = \mu(B_n)$$

なので $\mu(C) = k$ となり $k > -\infty$ がいえる．これで最小値をとる C が構成でき，claim が示せた．//

このことから

$$\mu(C \cap E) \leq 0 \quad (\text{そうでなければ } \mu(C \setminus E) < k \text{ となる})$$
$$\mu(E \setminus C) \geq 0 \quad (\text{そうでなければ } \mu(C \cup E) < k \text{ となる})$$

ここで $D = X \setminus C$ とおくと，これが定理の条件を満たすものである．また (4.1) も明らか．

最後に分解の一意性を示す．$\mu = \rho - \sigma$, $\rho \perp \sigma$ という別の分解を持ったとする．任意の E に対し $G \subseteq E$ のとき

$$\rho(E) \geq \rho(E) \geq \mu(G).$$

ここで G を動かして上限をとれば

$$\rho(E) \geq \mu_+(E).$$

同様に $\sigma \geq \mu_-$ も示せる．$\rho \perp \sigma$ より $H \in \mathscr{B}$ を

$$\rho(X \setminus H) = \sigma(H) = 0$$

ととる．

$$\rho(E) = \rho(E \cap H) = \mu(E \cap H) \leq \mu_+(E \cap H) \leq \mu_+(E).$$

上に示した $\rho \geq \mu_+$ と合わせて $\rho = \mu_+$ を得る．これで一意性が示せた．□

系 4.3. Lebesgue 分解定理および Radon-Nikodym の定理は，σ-有限の符号付測度に対して成立する．

さてこの応用として L^p 空間の双対空間を求めてみよう．

定理 4.4. μ を σ-有限な測度とする．また $1 \leq p < \infty$ とする．このとき $L^p(\mu)^*$ と $L^q(\mu)$ は同型で，その対応は

$$\varphi(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu \tag{4.2}$$

で与えられる．

証明　$g \in L^q(\mu)$ をとって

$$\varphi(f) = \int fg\,d\mu$$

と定めれば，Hölder の不等式から $\varphi \in L^p(\mu)^*$ で $\varphi\| \leq \|g\|_q$ が成り立つ．これは $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)^*$ を意味する．

逆に $L^p(\mu)^* \subseteq L^q(\mu)$ が成り立つことを示そう．μ が σ-有限だから $X_n \uparrow X$, $\mu(X_n) < \infty$ となる集合列がとれる．n を固定して $A \subseteq X_n$ に対し

$$\nu(A) = \varphi(1_A)$$

と定めれば，ν の実部および虚部は有限な符号付測度で，$\mu(A) = 0$ ならば $\nu(A) = 0$ である．したがって Radon-Nikodym の定理から $g_n \in L^1(\mu)$ が存在して

$$\nu(A) = \int_{X_n} 1_A g_n\,d\mu, \quad A \subseteq X_n$$

と表される．n を動かしたとき，g_n の一意性から $g_{n+1} = g_n$ a.e. on X_n. よって $g = g_n$ a.e. on X_n となる g が定まる．$f \in L^p$ が X_n の外で 0 である単関数ならば

$$\varphi(f) = \int_{X_n} fg\,d\mu. \tag{4.3}$$

よって近似により $f \in L^p(\mu)$ が X_n の外で 0 である有界可測関数ならば (4.3) が成立する．一般の $f \in L^p$ に対して

$$f_n(x) = 1_{X_n \cap \{|f| \leq n\}}$$

と定め $e(x)$ を

$$|g(x)| = e(x)g(x)$$

となるようにとる．$|e(x)| = 1$ と取れることは明らか．よって

$$\int |f_n(x)||g(x)|, d\mu = \int e(x)|f_n(x)|g(x), d\mu = \varphi(e|f_n|) \leq \|f_n\|_p\|\varphi\| \leq \|f\|_p\|\varphi\|.$$

$n \to \infty$ として単調収束定理から $fg \in L^1(\mu)$ かつ

$$\int |f(x)||g(x)|, d\mu \leq \|f\|_p\|\varphi\|$$

が示せる．また

$$\int f_n(x)g(x), d\mu \leq \varphi(f_n).$$

ここで $fg \in L^1(\mu)$ であるから，優収束定理から $n \to \infty$ として

$$\int f(x)g(x), d\mu \leq \varphi(f).$$

次に $\|g\|_q \leq \|\varphi\|$ を示す．

$$g_n(x) = 1_{X_n \cap \{|g| \leq n\}} g(x)$$

$f = |g_n|^q e$ とおけば

$$\|f\|_p^p = \int |g_n(x)|^{(q-1)p}\, d\mu = \int |g_n(x)|^q\, d\mu = \|g_n\|_q^q.$$

また

$$\begin{aligned}\int fg\, d\mu = \int |g_n|^{q-1} eg\, d\mu &= \int |g_n|^q\, d\mu \\ &= \varphi(f) \leq \|f\|_p \|\varphi\| = \|g_n\|_q^{q/p} \|\varphi\|.\end{aligned}$$

よって

$$\|g_n\|_q^{q-q/p} \leq \|\varphi\| \quad \therefore \|g_n\|_q \leq \|\varphi\|.$$

ここで $n \to \infty$ として，単調収束定理を使えば $\|g\|_q \leq \|\varphi\|$ を得る．最初に述べた関係から $\|g\|_q \geq \|\varphi\|$ も成り立っているから $\|g\|_q = \|\varphi\|$ となり，Banach 空間として同型であることが示せた．

$q = \infty$ の場合は $f = 1_{\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n} e$ ととる．すると $\|f\|_1 = \mu(\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n)$ であり，

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \int 1_{\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n} eg\, d\mu &= \int 1_{\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n} |g|\, d\mu \\ &\geq (\|\varphi\| + \varepsilon)\mu(\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n)\end{aligned}$$

一方

$$\varphi(f) \leq \|f\|_1 \|\varphi\| = \mu(\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n)\|\varphi\|$$

この両者から $\mu(\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\} \cap X_n) = 0$ となり，$n \to \infty$ として $\mu(\{|g| \geq \|\varphi\| + \varepsilon\}) = 0$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意だから $\|g\| \leq \|\varphi\|$ a.e. となる． □

第2章　微分と絶対連続性

1.　測度の正則性

測度空間 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ には特に位相構造を考える必要ななかった．ここでは X を位相空間のとし，位相が測度と関連する問題を取り扱う．そこで X を Hausdorff 空間とし，$\mathscr{B}$ を Borel σ-algebra とする．またこの節では特に断らない限り μ は有限測度であるとする．

定義 1.1. $A \in \mathscr{B}$ が μ-regular $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subseteq A,\ K \text{ はコンパクト}\} = \inf\{\mu(U);\ A \subseteq U,\ U \text{ は開集合}\}. \tag{1.1}$$

さらに，すべての $A \in \mathscr{B}$ が μ-regular のとき μ を regular という．

また上の定義で K をコンパクトでなく，単に閉集合にしたとき，A を μ-closed-regular といい，すべての $A \in \mathscr{B}$ が μ-closed-regular のとき μ を closed-regular という．

次の命題は明らかだろう．

命題 1.2. A が μ-regular であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し開集合 $U \supset A$ と，コンパクト集合 $K \subset A$ で，$\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$ となるものが存在することである．

μ-closed-regular の場合も同様である．

定理 1.3. X が距離空間のとき，任意の有限測度は closed-regular である．

証明　$\mathscr{R}$ を μ-regular な Borel 集合全体とする．$\mathscr{R}$ が σ-algebra になることを示そう．, X は開集合かつ閉集合だから明らかに $\mathscr{R}$ に属す．$A \in \mathscr{R}$ のとき，補集合 A^c が $\mathscr{R}$ に属することも明らかである．

$\mathscr{R}$ が加算の合併で閉じていることを示す．$A_n \in \mathscr{R}$ とする．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．すると，$F_n \subseteq A_n \subseteq U_n$ で $\mu(U_n \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}$ となる閉集合 F_n と開集合 U_n が取れる．$U = \cup U_n$, $F = \cup F_n$ とおくと

$$U \setminus F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus F_n)$$

なので

$$\mu(U \setminus F \subseteq) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

U は開集合であるが F が閉集合かどうかは分からない．$L_n = \bigcup_{j=1}^n F_j$ とすると $\mu(F \backslash L_n) \to 0$ が成り立つ (ここで μ が有限を使っている)．従って N を十分大きくとれば $\mu(F \setminus L_N) \leq \varepsilon$ とできる．よって

$$\mu(U \setminus L_N) \leq \mu(U \setminus F) + \mu(F \setminus L_N) < 2\varepsilon.$$

L_N は閉集合なので $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{R}$ が示せた．

最後に閉集合が $\mathscr{R}$ に入ることを示せばよい．F を閉集合として

$$U_\varepsilon = \{x; d(x, F) < \varepsilon\}$$

とおくと，U_ε は開集合で $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $U_\varepsilon \downarrow F$ となる．従って $\mu(U_\varepsilon \setminus F) \downarrow 0$ となるので，$F \in \mathscr{R}$ が示せる．□

定義 1.4. μ が tight $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$ となるコンパクト集合 K が存在する．

定理 1.5. X が距離空間のとき，μ が tight であるとき μ は regular である．

証明　μ は closed-regular であるから，閉集合で内側から近似できる．従って，任意の A と ε に対して $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$ となる閉集合 $F \subseteq A$ が存在する．また tightness から $\mu(X \backslash K) < \varepsilon$ となる．$F \cap K$ はコンパクト集合で $A \backslash (F \cap K) \subseteq (A \backslash F) \cup (X \setminus K)$ なので $\mu(A \backslash (F \cap K)) < 2\varepsilon$ である．これで regular であることが分かった．□

定理 1.6. (Ulam)　X を完備可分距離空間，μ を有限測度とするとき，μ は tight である．

また X が完備可分距離空間の Borel 集合と同相なときも μ は tight である．

証明　X が完備可分距離空間であるとする．任意に $\varepsilon > 0$ を与える．X は可分であるから自然数 n に対して $\frac{1}{n}$-閉球の加算個で覆える．従ってその中から有限個の和集合 F_n をとって $\mu(X \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ とできる．$F = \cap_n F_n$ とすると

$$X \setminus F \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus F_n)$$

だから

$$\mu(X \setminus F) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(X \setminus F_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

ところで作り方から F は全有界かつ閉だからコンパクトである．

X が完備可分距離空間の Borel 集合と同相なときは，定理 1.5 を使えば tight であることが分かる．□

定理 1.7. X が完備可分距離空間の Borel 集合と同相なとき，任意の有限測度は regular である．

これを使うと次のことが容易に分かる．

定理 1.8. また X が完備可分距離空間の Borel 集合と同相で，μ が有限測度ならば X 上の有界連続関数全体は $L^p(X,\mu)$ で稠密である．

証明 $L^p(X,\mu)$ の任意の元は $\sum_{n=1}^N a_n 1_{A_n}$ の形の元で L^p で近似できる．従って 1_A が 有界連続関数で L^p のなかで近似出来ればよい．測度の regularity から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，閉集合 $F \subseteq A$ と開集合 $U \supseteq A$ を $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ となるように取れる．ここで Ulyson の定理を使って F 上で $1, U$ の外で 0 となる連続関数 f で $0 \leq f \leq 1$ となるものが取れる．すると

$$\int_X |f - 1_A|^p \, d\mu \leq \int_{U \setminus F} 1^p \, d\mu \leq \varepsilon.$$

これで主張が示せた． □

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ で Lebesgue 測度を考えると，これは有限測度ではない．しかし加算個の円環の直和と考えれば，それぞれ円環で，開集合で外から，コンパクト集合で中から，差が $\frac{\varepsilon}{2^n}$ 以下になるようにできる．したがってこの場合も正しいことがわかる．

定理 1.9. $\mathbb{R}^n$ で Lebegue 測度を考えるとき，任意の有限測度 Borel 集合は，正則である．

実はこのことは第二可算公理を満たす局所コンパクト空間で，Radon 測度 (コンパクト集合が有限測度を持つ Borel 測度) が与えられているときも同じことが成立する．証明は同様にすればよい．

また次のことも成り立つ．

定理 1.10. $C_0(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ で稠密である．

ここでは連続関数で近似したが，後で $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の元で近似できることを示す．

2. 微積分の基本公式

次の定理を微積分の基本公式と呼んだ．f が連続関数のとき

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\, dy = f(x). \tag{2.1}$$

この定理を f が Lebesgue integrable の時に拡張する．Lebesgue 測度は λ か $|\ |$ で表す．

定理 2.1. g が $[a,b]$ で Lebesgue integrable とする．このとき a.e. x で

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(y)\, dy = g(x). \tag{2.2}$$

(測度 0 の x に対してはこの等式は成立しないかもしれない)

補題 2.2. $\mathscr{U} = \{(a_\lambda, b_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ とし，$W = \cup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)$ とおく．W は有界であると仮定する．このとき $t < |W|$ なる t に対し，有限個の互いに素な集合 $\{V_1, \ldots, V_q\} \subseteq \mathscr{U}$ で

$$\sum_{i=1}^{q} |V_i| \geq \frac{t}{3}$$

となるものが取れる．

証明　Lebesgue 測度の正則性よりコンパクト集合 $K \subseteq W$ で $|K| > t$ となるものが存在する．K はコンパクトだから，有限個の $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ がとれて $\cup_{i=1}^n U_n \supseteq K$ とできる．とくに

$$|U_1| \geq |U_2| \geq \cdots \geq |U_n|$$

となるように番号付けておく．$V_1 = U_1$ とし，V_2 は V_1 と交わらない最小の番号の $U_{m(2)}$ をとる．V_3 は V_1, V_2 と交わらない最小の番号の $U_{m(3)}$ をとる．以下帰納的に定め，disjoint なものが存在しなくなるまで続ける．得られた結果を $\{V_1, V_2, \ldots, V_q\}$ とする．これが求めるものであることを示そう．W_i を V_i と中心が同じで長さが3倍の開区間とする．

<u>claim</u> U_r に対してある i が存在し $U_r \subseteq W_i$

$\because$ U_r がどれかの V_i と一致すれば，このことは明らか．どの V_i とも一致しないときは，$k < r$ の，ある $V_i = U_k$ と交わることになる．そうでなければ，$V_1, \ldots, V_q$ のどれかになってしまうからである．$V_i = U_k$ と交われば，$k < r$ だから $|U_r| \leq |U_k| = |V_i|$. W_i は V_i の3倍の長さだから，$U_i \subseteq W_i$ でなければならない．//

以上のことから

$$t < |K| \leq |\cup_{i=1}^n U_i| \leq |\cup_{i=1}^q W_i| \leq \sum_{i=1}^{w} |W_i| = 3\sum_{i=1}^{w} |V_i|.$$

□

補題 2.3. μ を $[a, b]$ 上の有限測度．A を $\mu(A) = 0$ となる Borel 集合．
$\Rightarrow$ λ-a.e. $x \in A$: $\dfrac{d}{dx}\mu([a, x]) = 0$.

証明　λ-a.e. $x \in A$ に対し

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\mu((x-h, x+h))}{h} = 0$$

を示す．

$$P_j = \{x \in A; \varlimsup_{h\downarrow 0} \frac{\mu((x-h, x+h))}{h} > \frac{1}{j}\}$$

とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，開集合 $V \supseteq A$ を $\mu(V) < \varepsilon$ ととる．$x \in P_j$ に対して，ある $h > 0$ で $(x-h, x+h) \subseteq V$ で

$$\mu((x-h, x+h) > \frac{h}{j} = \frac{\lambda((x-h, x+h))}{2j} \tag{2.3}$$

となる h が取れる．このように $x \in P_j$ ごとに開区間 $(x-h, x+h)$ をとり

$$W = \cup_{x \in P_j}(x-h, x+h)$$

とおくと $W \supseteq P_j$ である．補題 2.2 より，$\forall t < \lambda(P_j) \le \lambda(W)$ に対して，disjoint interval $J_1, J_2, \ldots, J_q$ が

$$t \le 3 \sum_i \lambda(J_i)$$

となるように取れる．さらに

$$3 \sum_i \lambda(J_i) \le 6 \sum_i j\mu(J_i) \le 6j\mu(V) \le 6j\varepsilon.$$

よって $t \le 6j\varepsilon$ となるが，$t < \lambda(P_j)$ は任意なので

$$\lambda(P_j) \le 6j\varepsilon$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意なので $\lambda(P_j) = 0$ が従う．さらに $j \to \infty$ として求める結果を得る．□

定理 2.1 の証明　r を有理数として

$$g_r = (g-r) \vee 0, \quad f_r(x) = \int_a^x g_r(t)\,dt$$

とおく．Borel 測度 μ を

$$\mu(B) = \int_B g_r(t)dt$$

と定めると $A_r = \{g \le r\}$ 上で $g_=0$ だから $\mu(A_r) = 0$ である．ここで 補題 2.3 を用いて

$$\frac{df_r}{dx} = 0, \quad \lambda\text{-a.e. on } A_r = \{g \le r\}$$

r を有理数全体を動かしたときの除外集合の合併を C とする．

さて，一般に $a \le x < x+h \le b$ に対し

$$\int_x^{x+h} g(t)\,dt - rh = \int_x^{x+h} \{g(t) - r\}\,dt \le \int_x^{x+h} g_r(t)\,dt.$$

よって

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)\,dt \le r + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g_r(t)\,dt. \tag{2.4}$$

同様に $a \le x-h < x \le b$ に対し

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} g(t)\,dt \le r + \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} g_r(t)\,dt. \tag{2.5}$$

ここで次のような記号を導入する．

$$UR(f,x) = \varlimsup_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq LR(f,x) = \varliminf_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$UL(f,x) = \varlimsup_{h\downarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \geq LL(f,x) = \varliminf_{h\downarrow 0} \frac{f(x)-f(x-x)}{h}.$$

さて，以下では C の補集合上で考える．$r > g(x)$, $r \in \mathbb{Q}$ ならば

$$\frac{df_r(x)}{dx} = 0.$$

よって $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ とすれば (2.4), (2.5) から

$$UR(f,x) \leq r,$$
$$UL(f,x) \leq r.$$

$r \downarrow g(x)$ とすれば

$$UR(f,x) \leq g(x),$$
$$UL(f,x) \leq g(x).$$

g の代わりに $-g$ を考えれば

$$UR(-f,x) \leq -g(x),$$
$$UL(-f,x) \leq -g(x).$$

大小関係を逆にすれば

$$LR(f,x) \geq g(x),$$
$$LL(f,x) \geq g(x).$$

これらを合わせて

$$g(x) \leq LR(f,x) \leq UR(f,x) \leq g(x),$$
$$g(x) \leq LL(f,x) \leq UL(f,x) \leq g(x).$$

これは

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x), \quad \lambda\text{-a.e.}$$

を意味する．　□

定義 2.4. $[a,b]$ 上の関数 f が次を満たすとき**有界変動**であるという：

$$\mathrm{Var}(f:[a,b]) := \sup\{\sum |f(x_{i+1}-f(x_i)|;\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} < \infty. \tag{2.6}$$

$\mathrm{Var}(f:[a,b])$ は $[a,b]$ における総変動量という．

注意 2.1. 有界変動関数は単調増大関数の差として表される:

$$f(x) = \mathrm{Var}(f : [a,x]) - \{\mathrm{Var}(f : [a,x]) - f(x)\}.$$

命題 2.5. 有界変動関数の不連続点は高々加算個である.

定理 2.6. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し次は同値.

(i) 有限符号付測度 μ が存在し $f(x) = f(a) + \mu((a,x])$.

(ii) f は右連続で有界変動.

証明　(i) $\Rightarrow$ (ii)

定理 4.2 の Hahn 分解を用いて $\mu = \mu_+ - \mu_-$ と表す．$\mu_+((a,x]), \mu_-((a,x])$ は単調関数だから主張は明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

f は二つの単調右連続関数の差でかける．それぞれ測度が対応するから，f には符号付測度が対応する.　□

定理 2.7. f が有界変動なら a.e. で f は微分可能で，導関数 f は Lebesgue 可積分である。

証明　有界変動関数は単調関数の差にかけるから，単調増大のときを示せばよい．不連続点は高々可算で測度 0 だから f の代わりに $f(x+)$ を考えて右連続としてよい．するとある符号付測度 μ が存在して $f(x) - f(a) = \mu((a,x])$ と表される．定理 3.13 の Lebesgue 分解定理より $\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$ と絶対連続な部分と特異な部分に分解できる．Radon-Nikodym の定理から

$$\mu_{\mathrm{ac}}(A) = \int_A g(x)\,dx$$

と $g \in L^1(dx)$ と表される．定理 2.1 から

$$\frac{d}{dx}\mu_{\mathrm{ac}}((a,x]) = f(x) \quad \text{a.e. } x$$

である．一方補題 2.3 から

$$\frac{d}{dx}\mu_{\mathrm{s}}((a,x]) = 0 \quad \text{a.e. } x$$

である．よって主張が示せた.　□

定義 2.8. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が絶対連続 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } (a_i,b_i] \text{ は disjoint で } \sum_i (b_i - a_i) \le \delta \Rightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \le \varepsilon. \quad (2.7)$$

定理 2.9. μ を $[a,b]$ 上の有限符号付測度で $\mu(\{a\}) = 0$ とする．$f(x) = \mu((a,x])$ と定める．このとき次は同値.

(i) f は絶対連続.

(ii) μ は Lebesgue 測度に関して絶対連続.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii)

claim 1. f が絶対連続なら $F(x) = \mathrm{Var}(f : [a, x])$ も絶対連続.

∵ f が a.c. より $\forall\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を (2.7) のようにとる．さて，disjoint な区間 $(a_i, b_i]$ $i = 1, \ldots, n$ が $\sum_i(b_i - a_i) \leq \delta$ を満たすとする．このとき $(a_i, b_i]$ の分割を $a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < \cdots < a_{i,N_i} = b_i$ を

$$\mathrm{Var}(f : [a_i, b_i]) \leq \sum_j |f(a_{i,j}) - f(a_{i,j-1})| + \frac{\varepsilon}{n}$$

を満たすようにとる．f の条件より

$$|F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(f : [a_i, b_i]) \leq \sum_i \sum_j |f(a_{i,j} - f(a_{i,j-1})| + \varepsilon \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

よって F は絶対連続である．//

$f = F - (F - f)$ と単調増大関数の差にかけるから，f を初めから単調増大として定理を示せばよい．μ を対応する測度として，Lebesgue 測度に関して絶対連続であればよい．f が a.c. より $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $\sum_i(r_i - l_i) < \delta$ ならば $\sum |f(r_i) - f(l_i)| \leq \varepsilon$ が成り立つ．但し $(l_i, r_i]$ は disjoint である．

今 $\lambda(A) = 0$ とする．$\varepsilon > 0$ に対して δ を上のようにとる．測度の正則性から $U \supseteq A$ で $\lambda(U) < \delta$ となる U が存在する．$U = \cup_i(a_i, b_i)$ と高々加算の素な和でかける．$\sum_i(b_i - a_i) < \varepsilon$ である．ところで条件より

$$\mu(A) \leq \mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n (a_i, b_i)) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\mu(A) = 0$ が成立する．

(ii) $\Rightarrow$ (i)

μ は有限を仮定しているから定理 3.15 から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が取れて $\lambda(A) < \delta$ ならば $\mu(A) < \varepsilon$ とできる．そこで $\sum_i(b_i - a_i) < \delta$ となる素な区間 $(a_i, b_i]$ をとると $A = \cup_i(a_i, b_i]$ とすれば

$$\varepsilon > \mu(A) = \sum_i \mu((a_i, b_i]) = \sum_i \{f(b_i) - f(a_i)\}$$

となり，f が絶対連続であることが分かる． □

これから次の定理が従う.

定理 2.10. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し次は同値.

(i) f は絶対連続.

(ii) $g \in L^1(dx)$ が存在して $f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)\,dy$.

第3章　Fourier 級数

1.　定義と性質

$T=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ とする．集合としては $T=[0,2\pi)$ と同一視する．T 上の関数は，$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数と同一視する．T 上の p 乗可積分な関数全体を $L^p(T)$ とかき，ノルム $\|\ \|_p$ を

$$\|f\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \tag{1.1}$$

で定める．すなわち，測度を $\frac{dx}{2\pi}$ と正規化したものをとっておく．

$p=\infty$ のときは $L^\infty(T)$ の元は本質的に有界な関数である．ノルムは本質的上限で定める．$L^p(T)$ は $\|\ \|_p$ をノルムとする Banach 空間である．T 上の C^m 級の関数全体を $C^m(T)$ とかく．

さて，この章では T 上の関数 f が $f=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ と展開されることを議論する．

定義 1.1. $f\in L^1(T)$ に対して

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx},dx \tag{1.2}$$

を f の n 次 Fourier 係数 という．また Fourier 係数を用いて定義された級数

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx} \tag{1.3}$$

を f の Fourier 級数と呼ぶ.

命題 1.2. $f,g\in L^1(T)$ とするとき次が成り立つ.

(1) $\widehat{f+g}(n)=\hat{f}(n)+\hat{g}(n)$.

(2) 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して $\widehat{\alpha f}(n)=\alpha\hat{f}(n)$.

(3) $\overline{f}$ を $\overline{f}(x)=\overline{f(x)}$ で定義する．このとき $\hat{\overline{f}}(n)=\overline{\hat{f}(-n)}$

(4) $f_\xi(x)=f(x-\xi)$ と定めると，$\hat{f}_\xi=e^{-in\xi}\hat{f}(n)$.

(5) $|\hat{f}(n)|\le\|f\|_1$.

証明はすべて明らかである．上の (5) は $\hat{f}$ が $L^1(T)$ から $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ への有界作用素であることを意味している．

命題 1.3. (1) $f \in C^m(T)$ とすれば，$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$, $0 \leq k \leq m$.

(2) $f \in L^1(T)$ で $\hat{f}(0) = 0$ のとき

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

と定めると，$\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$, $n \neq 0$ である．

上の命題から $f \in C^m(T)$ ならば

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f^{(m)}\|_1 |n|^{-m}, \quad n \neq 0$$

となる．f が滑らかであるほど，$\hat{f}(n)$ は急速に 0 に収束することがわかる．

合成積と Fourier 級数

定義 1.4. 二つの関数 f, g に対し

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,dy \tag{1.4}$$

を f と g の**合成積**と呼ぶ.

合成積はいつでも定義できるわけではない．定義されるための十分条件を与えておく．

定理 1.5. (1) $f \in L^p(T)$, $g \in L^q(T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき $f * g$ は連続関数であり，

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

が成り立つ.

(2) $f \in L^p(T)$, $g \in L^1(T)$ のとき $f * g(x)$ はほとんどいたるところの x に対して定義され

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

が成り立つ.

証明 (1) は Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-y)||g(y)|\,dy \\
&\leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-y)|^p\,dy\right\}^{1/p} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(y)|^q\,dy\right\}^{1/q} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}$$

$f*g$ が 連続関数であることは $x \mapsto f_x$ が $L^p(T)$ への連続関数であることに注意すればよい.
(2) は

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,dy\\ &\le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-y)|^p|g(y)|\,dy\right\}^{1/p}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(y)|\,dy\right\}^{1/q}.\end{aligned}$$

ここで両辺を p 乗して積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f*g(x)|^p\,dx &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-y)|^p|g(y)|\,dy\|g\|_1^{p/q}\\ &= \|f\|_p^p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(y)|\,dy\|g\|_1^{p/q}\\ &= \|f\|_p^p\|g\|_1\|g\|_1^{p/q}\\ &= \|f\|_p^p\|g\|_1^p.\end{aligned}$$

これから $\|f*g\|_p \le \|f\|_p\|g\|_1$ が得られる. □

定理 1.6. $f*g$ が well-defined のとき

$$\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

が成り立つ.

証明

$$\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x-y)e^{-in(x-y)}\}\{g(y)e^{-iny}\}dy = \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

□

2. Cesàro 総和法

Fourier 級数の第 N 部分をを

$$S_Nf(x) = \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{int} \tag{2.1}$$

と定義する. $S_Nf \to f$ を問題としているわけであるが, 一般には難しい問題である. そこで次のような Cesàro 和を考える.

$$\sigma_Nf(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_nf(x). \tag{2.2}$$

こちらのほうが収束はやさしくなる.

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\right) f(y)\,dy \tag{2.3}$$

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\right) f(y)\,dy. \tag{2.4}$$

ここで

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

を Dirichlet 核,

$$\begin{aligned}\sigma_N(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)e^{inx} = \frac{1}{N+1}\left\{\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\}^2\end{aligned}$$

を Fejér 核という.

これらを用いると $S_N f = D_N * f$, $\sigma_N f = \sigma_N * f$ と表現できる.

命題 2.1. σ_N は次を満たす.

$$\sigma_N \geq 0,\ \ \frac{1}{2\pi}\sigma_N(x)\,dx = 1,\ \ \lim_{N\to\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta}\sigma_N(x)\,dx = 0.$$

命題 2.2. $1 \leq p \leq \infty$ のとき

$$\|\sigma_N f\|_p \leq \|f\|_p$$

証明

$$\begin{aligned}\|\sigma_N f\|_p &= \|\sigma_N * f\|_p\\ &\leq \|\sigma_N\|_1\|f\|_p \quad (\because\ \text{定理 } 2.5)\\ &= \|f\|_p.\end{aligned}$$

□

定理 2.3. $f \in C(T)$ のとき $\sigma_N f$ は f に一様収束する.

証明 $M = \|f\|_\infty$ とおく. f は一様連続であるから $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ s.t.

$$|x-y| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

またある N_0 が存在して $N \geq N_0$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \sigma_N(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

よって

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}\right\}\sigma_N(y)\{f(x-y)-f(x)\}\,dy$$

から

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_N(y)\varepsilon\,dy + \frac{\varepsilon}{M}2\|f\|_\infty = 3\varepsilon.$$

これで主張が示せた. □

注意 2.1. 上の定理から三角多項式 ($\sin nx$, $\cos nx$ の一次結合) は $C(T)$ で稠密であることが分かる.

系 2.4. (Weierstrass)　多項式は区間 $C([a,b])$ で稠密.

これは $\sin nx$, $\cos nx$ を Taylor 展開すればよいから明らかである.

定理 2.5. $1 \leq p < \infty$ とする. $f \in L^p(T) \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \|f - \sigma_N f\|_p = 0$.

証明　$f \in L^p(T)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$ となる $f_\varepsilon \in C(T)$ が存在する.

$$\begin{aligned}\|f - \sigma_N f\|_p &\leq \|f - f_e + f_e - \sigma_N f_\varepsilon + \sigma_N f_\varepsilon - \sigma_N f\|_p \\ &\leq \|f - f_e\|_p + \|f_e - \sigma_N f_\varepsilon\|_p + \|\sigma_N(f_\varepsilon - f)\|_p \\ &\leq 2\|f - f_e\|_p + \|f_e - \sigma_N f_\varepsilon\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \|f_e - \sigma_N f_\varepsilon\|_p.\end{aligned}$$

$\sigma_N f_\varepsilon$ は f_ε に一様収束するから L^p 収束する. よって

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|f - \sigma_N f\|_p \leq 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから求める結果を得る. □

定理 2.6. (Riemann-Lebesgue)　$f \in L^1(T)$ とすると, $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$

証明　f が三角多項式の時は明らか. 後は L^1 の元が三角多項式で近似できることを使えばよい. □

定理 2.7. (Fourier 級数の一意性)　$f \in L^1(T)$, $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

証明　$\sigma_N f$ が f に収束することから明らか. □

3.　Fourier 級数の L^2 理論

$L^2(T)$ は次の内積で Hilbert 空間になる.

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{3.1}$$

また

$$(e^{inx},e^{imx})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}(x)\,dx=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

これは $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(T)$ の正規直行系であることを意味している.

以下抽象的に Hilbert 空間に正規直行系 $\{u_n\}$ が与えられているとする. このとき

$$c_n=(f,u_n)$$

を一般化された Fourier 係数と呼ぶ.

定理 3.1. $\{u_n\}$ を Hilbert 空間の正規直行系とするとき次が成り立つ.

(1) 任意の $d_1,\dots,d_N$ に対し $\|f-\sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2\le\|f-\sum_{n=1}^N d_n u_n\|^2$.

(2) $\|f\|^2=\|f-\sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2+\sum_{n=1}^N |c_n|^2$.

(3) $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2\le\|f\|^2$.

(4) $\lim_{N\to\infty}\|f-\sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2=0.\ \Leftrightarrow\ \|f\|^2=\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$.

定義 3.2. 正規直行系 $\{u_n\}$ が, 任意の f に対して

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2=\|f\|^2 \tag{3.2}$$

が成り立つとき**完全**であるという. この等式を Parseval の等式という.

さて, 元の $L^2(T)$ の場合の, 本来の Fourier 級数の話に戻る.

定理 3.3. $f\in L^2(T)$ のとき $\lim_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_2=0$

証明　定理 3.1 の (1) より

$$\|S_Nf-f\|_2\le\|\sigma_Nf-f\|_2$$

である. あとは定理 2.5 を用いればよい. □

系 3.4. $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は完全である.

定理 3.5. $f \in C^k(T)$ $(k \geq 1)$ とする．このとき $\sum |n^{k-1}\hat{f}(n)| < \infty$ で $S_N f$ は f に一様収束する．

証明

$$\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)^j \hat{f}(n), \quad 1 \leq j \leq k$$

であった．$f^{(k)}$ に関する Parseval の等式によって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^k |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\sum |n^{k-1}\hat{f}(n)| &= \sum |n|^{k-1}(1+n^2)^{-k/2}(1+n^2)^{k/2}|\hat{f}(n)| \\ &\leq \left\{\sum \frac{|n|^{2k-21}}{(1+n^2)^k}\right\}^{1/2} \left\{\sum (1+n^2)^k |\hat{f}(n)|^2\right\} < \infty.\end{aligned}$$

よって求める結果が成り立つ．このことは $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$ を意味するから S_N は一様収束する． □

上の定理は C^1 なら一様収束をすることを意味するが，C^1 でなくても，絶対連続で微分が L^2 に属せば同じ証明が成り立つ．

第4章　超関数

1.　試験関数空間

<u>記法</u>

この章で使う記号を纏めておく.

空間: $\mathbb{R}^n$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$D^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$: order $\quad \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

$|\alpha| = 0 \Rightarrow D^\alpha f = f, \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall i \ \alpha_i \leq \beta_i$

$x = (x_1, \dots, x_n) \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: open set (fixed)

$\mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$K \subset \Omega$: compact set

$\mathscr{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega), \operatorname{supp} f \subseteq K\}$

$\|\phi\|_N := \max\{|D^\alpha \phi(x)|;\ x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}$

定義 1.1. ϕ_j, $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$\phi_j \to \phi \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists K$: compact s.t. $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq K, \forall N \in \mathbb{N}, \|\phi_j - \phi\|_N \to 0.$

定義 1.2. Λ: $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$: 線型汎関数

Λ が連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \phi_j \to \phi$ のとき $\Lambda(\phi_j) \to \Lambda(\phi)$

連続な線型汎関数を**超函数** (distribution) と呼び，その全体を $\mathscr{D}'(\Omega)$ とかく.

定理 1.3. Λ: $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ を線型汎関数とする.

$\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega) \Leftrightarrow$

$\forall K$: compact Λ: $\mathscr{D}_K(\Omega) \to \mathbb{R}$ が連続. i.e., $\exists N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ s.t. $|\Lambda(\phi)| \leq C\|\phi\|_N$

例 1.1. Dirac measure:

$$\delta_x(\phi) = \phi(x).$$

Functions and measures

$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (i.e., $\forall K$: compact $f|_K \in L^1(K)$)

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x)\, dx$$

$\Lambda_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ は

$$|\Lambda_f(\phi)| \le \|\phi\|_0 \int_K |f(x)|\, dx, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}_K$$

より分かる．

また μ: Radon measure (i.e., $\forall K$: compact $\mu(K) < \infty$)

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x)\, d\mu$$

も $\mathscr{D}'(\Omega)$ に入ることも同様に示せる．

Operation of distributions

$\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対し微分を

$$D^\alpha \Lambda(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi)$$

で定める．

claim $D^\alpha \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$

$\because$

$$|\Lambda(\phi)| \le C\|\phi\|_N.$$

よって

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| = |(\Lambda)(D^\alpha \phi)| \le C\|D^\alpha \phi\|_N \le C\|\phi\|_{N+|\alpha|}.$$

例 1.2. $\Omega = (a, b)$.

μ: Radon mesure on Ω

f を $f(x) - f(y) = \mu((x, y])$ となるように定める．すると $D\Lambda_f = \Lambda_\mu$ である．

$\because$

$$\int \phi\, d\mu = -\int \phi'(x) f(x)\, dx$$

を示せばよい．

$$\text{L.H.S.} = \int_{(a,b)} (\phi(x) - \phi(a))\, d\mu(x) = \int_{(a,b)} d\mu(x) \int_{(a,x)} \phi'(y)\, dy = \int_{(a,b)} \phi'(y)\, dx \int_{(y,b)} d\mu(x)$$

$$= \int_{(a,b)} \phi'(y)\, dx(f(b) - f(y)) = -\int_{(a,b)} \phi'(y) f(y)\, dx. \quad //$$

これは例えば $\mu = \delta_0$ のとき

$$f = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

とすればよい．この関数を Heviside 関数という．

Multiplication by functions

$\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ に対し

$$(f\Lambda)(\phi) = \Lambda(f\phi)$$

で定める．

claim $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$

$\because$ 一般に $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} f D^\beta g$

$$|\Lambda(\phi)| \leq C\|\phi\|_N$$

より

$$\begin{aligned} |(f\Lambda)(\phi)| &= |\Lambda(f\phi)| \\ &\leq C\|f\phi\|_N \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha(f\phi)\|_N \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq N} \left| \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} f D^\beta \phi) \right| \\ &\leq C'\|f\|_N \|\phi\|_N. \quad // \end{aligned}$$

また

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} f D^\beta \Lambda$$

も明らかである．

Sequence of distributions

Λ_j, $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

$\Lambda_j \to \Lambda$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$: $\Lambda_j \phi \to \Lambda \phi$.

定理 1.4. $\Lambda_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, 任意の $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ に対し $\lim_{j\to\infty} \Lambda_j(\phi)$ が存在するとき

$$\Lambda(\phi) := \lim_{j\to\infty} \Lambda_j(\phi)$$

で定義すると，$\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

証明　コンパクト集合 $K\omega$ をとる．$\phi \in \mathscr{D}_K$ に対し $\lim_{j\to\infty} \Lambda_j(\phi)$ が存在するから (Fréchet 空間における)Banach-Steinhaus の定理より Λ は $\mathscr{D}(K)$ 上で連続である．よって定理 1.3 より $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ である． □

超関数の局所化

$\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $U \subseteq \Omega$: open set のとき，

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Lambda_1 = \Lambda_2, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(U)$$

さて，次の定理の定理で与えられる $\{\psi_i\}$ を $\{U_\gamma\}$ に従属した局所有限の単位の分解という．

定理 1.5. $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を開集合の族で $\cup_\gamma U_\gamma = \Omega$ とする．このとき $\{\psi_i\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ $\psi_i \geq 0$ で次を満たすものが存在する．

(i) $\forall i, \exists \gamma \in \Gamma$ s.t. $\operatorname{supp} \psi_i \subseteq U_\gamma$

(ii) $\sum_i \psi_i(x) = 1$. 但し，任意のコンパクト集合上で $\phi_i \neq 0$ となる i は有限個.

証明　$B(x, r)$ を中心 x, 半径 r の開球とする．可算個の $V_i = B(x_i, r_i)$ を $\cup_i V_i = \Omega$ で，任意の i に対し $W_i = B(x_i, 2r_i) \subseteq U_\gamma$ となる γ が存在するようにとる．そこで $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & \text{on } V_i \\ \in [0,1] & \text{on } W_i \\ 0 & \text{on } W_i^c, \end{cases}$$

ととる．このような関数を作れることは，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_δ を

$$f_\delta = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\delta^2 - t^2}\right), & |t| < \delta, \\ 0, & |t| \geq \delta. \end{cases}$$

と定めると，$f_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で，$\operatorname{supp} f_d = [-\delta, \delta]$ である．積分すれば $x \leq -\delta$ で 0 で，$x \geq \delta$ で定数になる．この関数を使えば上のような関数が作れる．

これから帰納的に

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1 \\ \psi_{i+1} &= (1 - \phi_1) \cdots (1 - \phi_i)\phi_{i+1} \end{aligned}$$

と定めればよい．これが条件を満たすことは

$$\psi_1 + \cdots + \psi_n = 1 - (1-\phi_1)\dots(1-\phi_n)$$

から $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 上で $\psi_1 + \cdots + \psi_n = 1$ となっている． □

定理 1.6. $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を開集合の族で $\cup_\gamma U_\gamma = \Omega$ とする．各 U_γ で $\Lambda = 0$ であれば $\Lambda = 0$ である．特に $\Lambda_1, \Lambda_2 \in\in \mathscr{D}'(\Omega)$ が 各 U_γ で $\Lambda_1 = \Lambda_2$ であれば $\Lambda_1 = \Lambda_2$ である．

証明　単位の分解 $\{\psi_i\}$ をとれば

$$\Lambda(\phi) = \Lambda(\phi(\psi_1 + \cdots + \psi_n) = \Lambda(\phi\psi_1) + \cdots + \Lambda(\phi\psi_n) = 0$$

となるから明らか． □

上の定理から $\Lambda = 0$ となる最大の開集合 G が取れる．この補集合 $\Omega \setminus G$ を**台** (support) という．

定義 1.7. 台が有界な超関数全体を $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ とかく．

$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ の元は $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に拡張できることを注意しておく．

<u>超関数と関数の合成積</u>

以下 $\Omega = \mathbb{R}^n$ とし，$\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上の関数 u に対して次の記号を使う．

$$\tau_x u(y) := u(y-x), \quad \check{u}(x) = u(-x).$$

さらに二つの関数 u, v に対して合成積を

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,dy$$

で定める．但し，積分が意味があるときだけである．$u * v$ は次のようにも書ける．

$$u * v(x) = \int u(y)v(x-y)\,dy = \int u(y)\tau_x\check{v}(y)\,dy.$$

これに基づいて，超関数 Λ と $\phi \in \mathscr{D}$ との合成積を

$$\Lambda * \phi(x) = \Lambda(\tau_x\check{\phi})$$

と定義する．また超関数に対しても τ_x を

$$\tau_x\Lambda(\phi) = \Lambda(\tau_{-x}\phi)$$

で定義する．

定理 1.8. $\Lambda \in \mathscr{D}'$, ϕ, $\psi \in \mathscr{D}$ とする．次が成り立つ.

(i) $\tau_x(\Lambda * \phi) = (\tau_x \Lambda) * \phi = \Lambda * (\tau_x \phi)$.

(ii) $\Lambda * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で

$$D^\alpha(\Lambda * \phi) = (D^\alpha \Lambda) * \phi = \Lambda * (D^\alpha \phi).$$

(iii) $\Lambda * (\phi * \psi) = (\Lambda * \phi) * \psi$

証明　定義から

$$(\tau_x(\Lambda * \phi))(y) = (\Lambda * \phi)(y - x) = \Lambda(\tau_{y-x}\check{\phi}).$$
$$((\tau_x \Lambda) * \phi)(y) = (\tau_x \Lambda)(\tau_y \check{\phi}) = \Lambda(\tau_{y-x}\check{\phi}).$$
$$(\Lambda * (\tau_x \phi))(y) = \Lambda(\tau_y(\tau_x \phi)^\vee) = \Lambda(\tau_{y-x}\check{\phi}).$$

以上のことから (i) が示せた.
　(ii) は

$$\tau_x((D^\alpha \phi)^\vee) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tau_x \check{\phi})$$

に注意して

$$(\Lambda * (D^\alpha \phi))(x) = \Lambda(\tau_x(D^\alpha \phi)^\vee) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha(\tau_x \check{\phi})) = D^\alpha \Lambda(\tau_x \check{\phi}) = D^\alpha \Lambda * \phi(x).$$

2 番目の等式は $e \in \mathbb{R}^n$ を unit vector として，微分の定義に戻って計算しよう.

$$\eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re})$$

と定義して，

$$\eta_r(\Lambda * \phi) = \Lambda * (\eta_r \phi)$$

となる．ここで $r \to 0$ のとき $\eta_r \phi \to D_e \phi$ in $\mathscr{D}$ だから

$$\tau_x((\eta_r \phi)^\vee) \to \tau_x((D_e \phi)^\vee) \text{ in } \mathscr{D}.$$

よって

$$\lim_{r \to 0} \Lambda * (\eta_r \phi)(x) = \Lambda * (D_e \phi)(x).$$

従って $D_e(\Lambda * \phi) = \Lambda * (D_e \phi)$. 後はこれを繰り返せばよい.
　最後に (iii) を示す.

$$(\phi * \psi)^\vee(x) = \int \psi(y)\phi(-x - y)\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \check{\psi}(y)\phi(-x+y)\,dy \\
&= \int \check{\psi}(y)\check{\phi}(x-y)\,dy \\
&= \int \check{\psi}(y)\tau_y\check{\phi}(x)\,dy.
\end{aligned}
$$

ところで $y \mapsto \check{\psi}(y)\tau_y\check{\phi}$ は $\mathscr{D}(K)$ で連続である．ただし $K = K_1 + K_2$, $K_1 = \operatorname{supp}\check{\phi}$, $K_2 = \operatorname{supp}\check{\psi}$ である．

上の計算から

$$
\begin{aligned}
\Lambda * (\phi * \psi))(0) = \Lambda(\phi * \psi)^{\vee} &= \Lambda\left(\int_{K_2} \check{\psi}(y)\tau_y\check{\phi}\,dy\right) \\
&= \int_{K_2} \check{\psi}(y)\Lambda(\tau_y\check{\phi})\,dy = \int \psi(-y)(\Lambda * \phi)(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

従って

$$\Lambda * (\phi * \psi))(0) = (\Lambda * \phi) * \psi(0).$$

一般のときは 0 を x にすればよい． □

定義 1.9. $\mathbb{R}^n$ において

$$h_j(x) = j^n h(jx), \quad j \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

で $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $h \geq 0$, $\int h(x)\,dx = 1$ となるものを approximate identity と呼ぶ．

定理 1.10. $\{h_j\}$ を approximate identity, $\phi \in \mathscr{D}$, $\Lambda \in \mathscr{D}'$ とする．次が成り立つ．

(1) $\lim \phi * h_j = \phi$ in $\mathscr{D}$.

(2) $\lim \Lambda * h_j = \Lambda$ in $\mathscr{D}'$.

証明　f を連続関数とするとき，$f * h_j \to f$ が局所一様収束の意味で成立することを示そう．

$$f(x) - f * h_j(x) = \int (f(x) - f(x-y))h_j(y)\,dy.$$

コンパクト集合 K をとると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し δ が存在して，$x \in K$, $|x-y| \leq \delta$ ならば $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$ とできる．j が十分大きければ，h_j の台は $\{x; |x|\delta\}$ に含まれる．従って $|f(x) - f * h_j(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in K$ となる．

また $\phi \in \mathscr{D}$ のときは

$$D^{\alpha}(\phi * h_j)(D^{\alpha}\phi) * h_j \to D^{\alpha}\phi$$

は局所一様収束の意味で収束する．これで (1) が 示せた．

(2) は次で分かる．

$$(\Lambda * h_j)(\phi) = ((\Lambda * h_j) * \check{\phi})(0) = ((\Lambda * (h_j * \check{\phi}))(0)$$

ここで $h_j * \check{\phi} \to \check{\phi}$ in $\mathscr{D}$ だから

$$\lim_{j\to\infty}(\Lambda * h_j)(\phi) = \lim_{j\to\infty}((\Lambda * (h_j * \check{\phi}))(0) = ((\Lambda * \check{\phi}))(0) = \Lambda(\phi).$$

□

上の定理は超関数が C^∞ 関数の極限として表されることを示している．この合成積の方法を用いれば $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が L^p で稠密であることも示せる．

第5章　Fourier 変換

1.　フーリエ変換の定義

$\mathbb{R}^n$ で考える．

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し Fourier 変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \tag{1.1}$$

で定める．明らかに

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

である．

$$e_\xi(x) = e^{i\xi\cdot x} \tag{1.2}$$

と定めると

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (f * e_\xi)(0)$$

と表すことも出来る．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対し

$$D_\alpha = i^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

と定義する．$D_\alpha e_\xi = \xi^\alpha e_\xi$ である．表記を簡単にするために定数倍してある．従って，P を $P(\xi) = \sum c_\alpha \xi^\alpha$ となる多項式とすると

$$P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha, \quad P(-D) = \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha$$
$$P(D) e_\xi = P(\xi) e_\xi$$

が成り立つ．

定理 1.1. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $(\tau_x f)^\wedge = e_{-x}\hat{f}$.

(2) $(e_x f)^\wedge = \tau_x \hat{f}$.

(3) $(f * g)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{g}$.

(4) $\lambda > 0,\ h(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \hat{h}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$

証明 (1) は

$$
\begin{aligned}
(\tau_x f)^\wedge(\xi) &= \int \tau_x f(y) e_{-\xi}(y)\, dy = \int f(y) \tau_{-x} e_{-\xi}(y)\, dy \\
&= \int f(y) e_{-x}(\xi) e_{-\xi}(y)\, dy = e_{-x}(\xi)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

(2) は

$$
(e_x f)^\wedge(\xi) = \int e_x(y) f(y) e_{-\xi}(y)\, dy = \int e_{(x-\xi)}(y) f(y)\, dy = \hat{f}(-x+\xi) = \tau_x \hat{f}(\xi).
$$

(3) は

$$
\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int (f*g)(x) e^{-i\xi\cdot x}\, dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\int f(x-y) g(y)\, dy e^{-i\xi\cdot x}\, dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int f(x-y) e^{-i\xi\cdot(x-y)}\, dx \int g(y) e^{-i\xi\cdot y}\, dy \\
&= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(4) は $y = x/\lambda$ という変数変換で

$$
\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x/\lambda) e^{-i\xi\cdot x}\, dx = (2\pi)^{-n/2} \int f(y) e^{-i\lambda\xi\cdot y} \lambda^n\, dy = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)
$$

□

2. 急減少関数

f が急減少関数 $\overset{\text{def}}{\iff} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^N |D_\alpha f(x)| < \infty$
急減少関数の全体を $\mathscr{S}$ (または $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) とかく.

定理 2.1. 次が成立する.

(1) $\mathscr{S}$ は Fréchet 空間である（countably normed complete space)

(2) P を多項式，$g \in \mathscr{S}$ とするとき，次は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}$ への写像として連続:

$$
f \mapsto Pf, \quad f \mapsto gf, \quad f \mapsto D_\alpha f.
$$

(3) P を多項式とするとき

$$
(P(D)f)^\wedge = P\hat{f}, \quad (Pf)^\wedge = P(-D)\hat{f}.
$$

(4) $f \mapsto \hat{f}$ は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}$ への連続写像 (後で同型写像であることを示す).

証明 (1) 可算個の seminorm は

$$\|f\|_N = \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |D_\alpha f(x)|$$

で与えられる．完備性は $\{f_n\}$ を Cauchy 列とするとき，$\forall\alpha, \beta$ に対し

$$f_j \to g, \quad x^\alpha D_\beta f_j \to g_{\alpha,\beta}$$

となる g, $g_{\alpha,\beta}$ が存在する．$g_{\alpha,\beta} = x^\alpha D_\beta g$ であることは容易に分かる．従って $g \in \mathscr{S}$ で $f_j \to g$ in $\mathscr{S}$ である．

(2) P を k 次の多項式とする．

$$(1+|x|^2)^N D_\alpha(Pf) = (1+|x|^2)^N \sum_{\beta \le \alpha} C_{\alpha,\beta} D_{\alpha-\beta} P D_\beta f.$$

ここで $D_{\alpha-\beta}P$ は $k - |\alpha-\beta|$ 次の多項式であるから，$\exists M \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ s.t.

$$|(1+|x|^2)^N D_\alpha(Pf)| \le C(1+|x|^2)^M \sum_{\beta \le \alpha} |D_\beta f|.$$

これから連続性が従う．他も同様である．

(3)

$$(P(D)f) * e_\xi = f * (P(D)e_\xi) = f * (P(\xi)e_\xi) = P(\xi) f * (e_\xi).$$

この 0 での値を求めて $(P(D)f)^\wedge = P\hat{f}$ を得る．

次に $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1 + \varepsilon, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\varepsilon \neq 0$,

$$\frac{\hat{f}(\xi') - \hat{f}(\xi)}{i\varepsilon} = (2\pi)^{-n/2} \int x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\varepsilon} - 1}{ix_1\varepsilon} e^{-x\cdot\xi}\, dx.$$

$x_1 f \in L^1$ より，$\varepsilon \to 0$ のとき dominated convergence theorem が使えて

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\hat{f}(\xi) = -(2\pi)^{-n/2} \int x_1 f(x) e^{-x\cdot\xi}\, dx.$$

よって

$$-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\hat{f}(\xi) = (x_1 f)^\wedge.$$

一般の場合はこれを繰り返す.

(4) $f \in \mathscr{S}$, $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)$ とする．$g \in \mathscr{S}$ である．$\hat{g} = D_\alpha \hat{f}$ より

$$P \cdot D_\alpha \hat{f} = P \cdot \hat{g} = (P(D)g)^\wedge.$$

また $P(D)g \in L^1$ より $P \cdot D_\alpha \hat{f}$ は有界．よって $\hat{f} \in \mathscr{S}$ が分かった．

特に

$$\begin{aligned}\|P \cdot D_\alpha \hat{f}\| &\le \|P(D)g\|_1 \le \|(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}(1+|x|^2)^{(n+1)/2}P(D)g\|_1 \\ &\le \|(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}\|_1 \|(1+|x|^2)^{(n+1)/2}P(D)(x^\alpha f)\|_\infty \\ &\le \|(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}\|_1 \|\!|f|\!\|_N.\end{aligned}$$

但し，N は十分大きくとる．これから連続性が従う． □

定理 2.2. (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. (i.e., $\lim_{|x|\to\infty} |\hat{f}(x)| = 0$)

証明 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S}$ で $\mathscr{D}$ は L^1 で稠密だから，$\mathscr{S}$ は稠密．$f \in \mathscr{S}$ のとき $\hat{f} \in \mathscr{S} \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

一般の $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対しては $f_n \in \mathscr{S}$ を $\|f - f_n\|_1 \to 0$ ととる．すると $\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_\infty \to 0$ と $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ が Banach 空間であることに注意すれば $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. □

補題 2.3. $\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$ と定めると，$\hat{\phi} = \phi$.

証明 1次元のときを示せばよい．$\phi \in \mathscr{S}$ は明らか．また

$$\begin{aligned}\hat{\phi}'(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\int e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = \int -ixe^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx \\ &= \int i\frac{d}{dx}e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = -\int i\frac{d}{dx}e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}e^{-i\xi x}\,dx \\ &= -\xi\int \frac{d}{dx}e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = -\xi\hat{\phi}(\xi).\end{aligned}$$

この微分方程式を解いて $\hat{\phi} = C\phi$. また定数 C は

$$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}\,dx = 1$$

より $C = 1$ となり求める結果を得る． □

定理 2.4. (The inversion theorem)

(1) $f \in \mathscr{S}$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \tag{2.1}$$

(2) $f \mapsto \hat{f}$ は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}$ への連続線型写像で

$$f^{\wedge\wedge\wedge\wedge} = f \tag{2.2}$$

(3) $f \in L^1$, $\hat{f} \in L^1$ ならば

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi$$

証明 $f,\, g \in L^1$

$$(2\pi)^{-n/2} \iint f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}\, dxdy = \int \hat{f}(y)g(y)\, dy = \int f(x)\hat{g}(x)\, dx.$$

ここで $g(x) = \phi(x/\lambda) = e^{-x^2/2\lambda^2}$ として

$$\int \phi(y/\lambda)\hat{f}(y)\, dy = \int f(x)\lambda^n \hat{\phi}(\lambda x)\, dx = \int f(x/\lambda)\hat{\phi}(x)\, dx.$$

ここで $\lambda \to \infty$ とすれば $f(x/\lambda) \to f(0)$, $\phi(y/\lambda) \to \phi(0)$ であるから

$$\phi(0) \int \hat{f}(y)\, dy = f(0) \int \hat{\phi}(x)\, dx.$$
$$\therefore\ f(0) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(y)\, dy.$$

これを使って

$$f(x) = (\tau_{-x}f)(0) = (2\pi)^{-n/2} \int (\tau_{-x}f)^\wedge(y)\, dy = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(y)e^{ix\cdot y}\, dy.$$

(2) $\mathscr{F}f = \hat{f}$ で $\mathscr{F}$ を定める．(1) から $\mathscr{F}$ は 1:1 で $\mathscr{F}^2 g = \check{g}$ ($\check{g}(x) = g(-x)$) よって $\mathscr{F}^4 g = g$. 従って $\mathscr{F}$ は onto で $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$ は連続.

(3) $f,\, g \in L^1$ に対し

$$\int \hat{f}(y)g(y)\, dy = \int f(x)\hat{g}(x)\, dx$$

であった．ここで $h(x) = \int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$ とおけば $g \in \mathscr{S}$ のとき

$$\int h(x)\hat{g}(x)\, dx = \iint \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(x)\, d\xi dx = \int \hat{f}(\xi)\, d\xi \int e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(x)\, d\xi dx$$
$$= \int \hat{f}(\xi)(2\pi)^{n/2}g(\xi)\, d\xi = \int (2\pi)^{n/2} f(\xi)\hat{g}(\xi)\, d\xi.$$

従って

$$\int (h(x) - (2\pi)^{n/2}f(x))\hat{g}(x)\, dx = 0.$$

$\hat{g}$ は $\mathscr{S}$ 全体を動くから $h = (2\pi)^{n/2}f$ となる． □

定理 2.5. $f,\, g \in \mathscr{S}$ のとき次が成り立つ.

(1) $f * g \in \mathscr{S}$.

(2) $(fg)^\wedge = (2\pi)^{-n/2}\hat{f} * \hat{g}$

証明 (1)

$$
\begin{aligned}
(f * g)^\wedge &= (2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{g} \in \mathscr{S} \\
\therefore\ f * g &= (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}) \in \mathscr{S}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\hat{f} * \hat{g} &= \mathscr{F}f * \mathscr{F}g = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mathscr{F}f\mathscr{F}\mathscr{F}g) \quad ((1) \text{ の証明中に示した}) \\
&= (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}^2 f\mathscr{F}^2 g) = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^{-1}(\check{f}\check{g}) = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}(fg) = (2\pi)^{n/2}(fg)^\wedge
\end{aligned}
$$

□

定理 2.6. (Plancherel) $\Psi f = \hat{f}$ for $f \in \mathscr{S}$ となる isometry $\Psi\colon L^2 \to L^2$ が一意的に存在する．この Ψf も $\hat{f}$ とかく.（もはや積分ではかけない.）

証明 $f, g \in \mathscr{S}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\overline{g(x)}\,dx &= \int \overline{g}(x)\,dx(2\pi)^{-n/2}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \int \hat{f}(\xi)\,d\xi\overline{\int(2\pi)^{-n/2}g(x)e^{-ix\cdot\xi}}\,dx \\
&= \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

特に $g = f$ として

$$
\int |f(x)|^2\,dx = \int |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi.
$$

$\mathscr{S}$ は L^2 で稠密だから isometry として一意的に拡張できる． □

例 2.1. $f = 1_{[-1,1]}$ とすると

$$
\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = -\frac{1}{i\xi\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{i\xi\sqrt{2\pi}}(e^{i\xi} - e^{i\xi}) = \frac{2\sin\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}.
$$

これから Plancherel の定理を使うと

$$
\int_{-1}^{1} 1^2\,dx = \int \frac{4}{2\pi}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi.
$$

従って

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \pi.
$$

3.　緩増加超関数

定理 3.1. 次が成立する．

(1) $\mathscr{D}$ は $\mathscr{S}$ で稠密.

(2) 埋め込み $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ は連続.

証明 (1) 任意の $f \in \mathscr{S}$ をとる．また $\psi \in \mathscr{D}$ を

$$\psi = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ \in [0,1] & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$$

となるようにとる．さらに $f_r(x) = f(x)\psi(rx) \in \mathscr{D}$ とおく．

<u>claim</u> $f_r \to f$ in $\mathscr{S}$ as $r \to 0$.

∵

$$P(x)D_\alpha(f - f_r)(x) = P(x)\sum_{\beta \leq \alpha} D_{\alpha-\beta}f(x)r^{|\beta|}D_\beta[1-\psi](rx)$$

ここで

$$D_\beta[1-\psi](rx) = 0 \text{ for } |x| \leq \frac{1}{r}.$$

また $PD_{\alpha-\beta}f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ より，一様に 0 にいく．

(2) K がコンパクトのとき，$\mathscr{D}$ と $\mathscr{S}$ の位相は同じである．(これは $(1+|x|^2)^N$ が コンパクト集合 K 上では有界である事を使えばよい) したがって $\mathscr{D}_K \subset \mathscr{S}$．また

$$\mathscr{D}_K \subset \mathscr{S} \text{ 連続}$$

これから $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ は連続. □

定義 3.2. $\mathscr{S}$ 上の連続線型汎関数を**緩増加超関数** (tempered distributin) とよぶ．また緩増加超関数全体を $\mathscr{S}$ (または $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$) とかく．

埋め込み $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ が連続だから $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ である．この埋め込みは 1:1 であるので，sS' の元を $\mathscr{D}'$ の元と見ることもある．

例 3.1. (1) $\Lambda \in \mathscr{D}'$, $\operatorname{supp}\Lambda$ がコンパクト $\Rightarrow$ $\Lambda \in \mathscr{S}'$

∵ $K = \operatorname{supp}\Lambda$, $\psi \in \mathscr{D}$ を K の近傍で $\psi = 1$ となるようにとる

$$\tilde{\Lambda}(f) = \Lambda(\psi f) \quad f \in \mathscr{S}$$

とする．$f_j \to 0$ in $\mathscr{S}$ ならば $\mathbb{R}^n$ 上で一様に $D_\alpha f_j \to 0$ となる．従って $\psi f_j \to 0$ in $\mathscr{D}$ となる．よって $\tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}'$ となる．明らかに $\tilde{\Lambda}(\phi) = \Lambda(\phi)$ for $\phi \in \mathscr{D}$ だから $\tilde{\Lambda}$ は Λ の拡張になっている．//

(2) μ: a Radon measure on $\mathbb{R}^n$, ある $N > 0$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-N} d\mu(x) < \infty$$

$\Rightarrow \mu \in \mathscr{S}'$.

$\because$

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad f \in \mathscr{S}$$

と定める．Λ の連続性を示す．$f_j \to 0$ in $\mathscr{S}$ のとき $\|(1 + |x|^2)^N f_j\|_\infty \to 0$.

$$\left| \int f_j \, d\mu \right| = \left| \int (1 + |x|^2)^N f_j (1 + |x|^2)^{-N} \, d\mu \right| \leq \|(1 + |x|^2)^N f_j\|_\infty \int (1 + |x|^2)^{-N} \, d\mu \to 0.$$

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad f \in \mathscr{S}$$

(3) $1 \leq p < \infty$, g: a measurable functin on $\mathbb{R}^n$, $\exists N > 0$ s.t.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

$\Rightarrow g \in \mathscr{S}'$.

$\because$

$$\Lambda(f) = \int g f \, dx \quad f \in \mathscr{S}$$

と定める．

(i) $p > 1$ の場合．q を共役指数とする: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned}
|\Lambda(f)| &= \left| \int (1 + |x|^2)^N f(x) (1 + |x|^2)^{-N} g(x) \, dx \right| \\
&= \left\{ \int |(1 + |x|^2)^N f(x)|^q \, dx \right\}^{1/q} \left\{ \int |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \\
&\leq C \left\{ \int (1 + |x|^2)^{-Mq} |(1 + |x|^2)^{N+M} f(x)|^q \, dx \right\}^{1/q} \\
&\leq C \left\{ \int (1 + |x|^2)^{-Mq} \, dx \right\} \|(1 + |x|^2)^{N+M} f\|_\infty.
\end{aligned}$$

M を十分大きくとれば $\int (1 + |x|^2)^{-Mq} \, dx < \infty$ とできる．

$p = 1$ の場合も同様．//

(4) L^p の元，多項式，多項式で絶対値がおさえられる関数は $\mathscr{S}'$ の元.

(5) $e^{|x|^2}$ は $\mathscr{S}'$ の元にはならない.

定理 3.3. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, P: a plynomial, $g \in \mathscr{S}$, $\Lambda \in \mathscr{S}' \Rightarrow D_\alpha \Lambda$, $P\Lambda$, $g\Lambda \in \mathscr{S}'$

証明

$$
\begin{aligned}
(D_\alpha \Lambda)(f) &= (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D_\alpha f)\\
(P\Lambda)(f) &= \Lambda(Pf)\\
(g\Lambda)(f) &= \Lambda(gf)
\end{aligned}
$$

より明らか. □

定義 3.4. $\Lambda \in \mathscr{S}'$ に対し Λ の Fourier 変換 $\hat{\Lambda}$ を

$$\hat{\Lambda}(\phi) = \Lambda(\hat{\phi}), \quad \phi \in \mathscr{S} \tag{3.1}$$

で定める.

注意 3.1. L^1 or L^2 のときの Fourier 変換と consistent になる.
$\because$ $f \in L^1$ のとき，これを $\mathscr{S}'$ の元とみなしたものを Λ_f とかく．$\phi \in \mathscr{S}$ のとき

$$\hat{\Lambda}_f(\phi) = \Lambda_f(\hat{\phi}) = \int f\hat{\phi}\,dx = \int \hat{f}\phi\,dx \quad (\text{定理 2.4 の証明の中で注意した}) = \Lambda_{\hat{f}}(\phi).$$

$f \in L^2$ のときも

$$\int f\hat{\phi}\,dx = \int \hat{f}\phi\,dx$$

が成立する．//

定理 3.5. (1) $\mathscr{S}'$ の写像 $\mathscr{F}(\Lambda) = \hat{\Lambda}$ は連続で 1:1, 周期 4 の線型写像である．さらに逆写像も連続．但し $\mathscr{S}'$ の位相は $*$-弱位相で入れる.

(2) $\Lambda \in \mathscr{S}'$, P: plynomial のとき

$$(P(D)\Lambda)^\wedge = P\hat{\Lambda} \quad (P\Lambda)^\wedge = P(-D)\hat{\Lambda}.$$

証明 (1) W を $\mathscr{S}'$ の 0 の近傍とする．$\mathscr{S}'$ は $*$-弱位相を入れてあるので $\exists f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{S}$ s.t.

$$\{\Lambda \in \mathscr{S}';\ |\Lambda(f_j)| < 1,\ j = 1, \ldots, k\} \subseteq W.$$

そこで

$$V := \{\Lambda \in \mathscr{S}';\ |\Lambda(\hat{f}_j)| < 1,\ j = 1, \ldots, k\}$$

すると $\Lambda \in V \ \Rightarrow \ \hat{\Lambda} \in W$ となる．実際

$$|\hat{\Lambda}(f_j)| = |\Lambda(\hat{f}_j)| < 1$$

となるからである．よって $\mathscr{F}$ は 連続．また

$$(\mathscr{F}^4 \Lambda)(f) = \Lambda(\mathscr{F}^4 f) = \Lambda(f)$$

なので $\mathscr{F}^4\Lambda = \Lambda$ となり $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$ は連続である．

残りのことは $\mathscr{S}$ の場合の結果から従う．

$$\begin{aligned}(P(D)\Lambda)^\wedge(f) &= (P(D)\Lambda)(\hat{f}) = \Lambda(P(-D)\hat{f}) = \Lambda((Pf)^\wedge) \quad (\because \text{ 定理 } 2.1) \\ &= \hat{\Lambda}(Pf) = (P\hat{\Lambda})(f).\end{aligned}$$

これは $(P(D)\Lambda)^\wedge = P\hat{\Lambda}$ を意味している．また

$$(P(-D)\hat{\Lambda})(f) = \hat{\Lambda}(P(D)f) = \Lambda((P(D)f)^\wedge) = \Lambda(P\hat{f}) = (P\Lambda)(\hat{f}) = (P\Lambda)^\wedge(f).$$

これで $(P\Lambda)^\wedge = P(-D)\hat{\Lambda}$ が示せた． □

例 3.2. (1) $\hat{1} = (2\pi)^{1/2}\delta$, $\hat{\delta} = (2\pi)^{-1/2}1$.

$\because$

$$1(\phi) = \int \phi(x)\, dx$$

だから

$$\hat{1}(\phi) = 1(\hat{\phi}) = \int \hat{\phi}\, dx = (2\pi)^{1/2}\phi(0) = (2\pi)^{1/2}\delta(\phi).$$

$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int \phi\, dx = (2\pi)^{-1/2}1(\phi).$$

//

(2) $P(D)\delta)^\wedge = P$, $\hat{P} = P(-D)\delta$.

これらは (1) から明らか.

(3) $\Lambda \in \mathscr{S}' \ \Rightarrow \Lambda^{\wedge\wedge} = \check{\Lambda}$. 但し，$\check{\Lambda}(f) = \Lambda(\check{f})$ と定める．特に $\check{\delta} = \delta$.

$\because$

$$\Lambda^{\wedge\wedge}(f) = \Lambda(f^{\wedge\wedge}) = \Lambda(\check{f}) = \check{\Lambda}(f).$$