解析学演義

$<$ 記号 $>$

$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$, $\mathbf{N} = \{0\} \cup \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z} =$ 整数全体, $\mathbf{Q} =$ 有理数全体, $\mathbf{R} =$ 実数全体, $\mathbf{C} =$ 複素数全体

$<$ 問題 $>$

[1] $0 < p < \infty$, $x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ とするとき，次を示せ：

$$\min\{1,\ n^{p-1}\} \sum_{j=1}^n x_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^p \leq \max\{1,\ n^{p-1}\} \sum_{j=1}^n x_j^p.$$

[2] 集合 A, B と実数値関数 $f : A \times B \to \mathbf{R}$ とする．以下の命題が正しければ証明，さもなくば反例を与えよ；(i) $\sup\limits_{a \in A} \sup\limits_{b \in B} f(a, b) = \sup\limits_{b \in B} \sup\limits_{a \in A} f(a, b) = \sup\{f(a, b);\ (a, b) \in A \times B\}$.
(ii) $\sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} f(a, b) = \inf\limits_{b \in B} \sup\limits_{a \in A} f(a, b)$. (iii) (a_0, b_0) が f の鞍点, 即ち条件

$$f(a, b_0) \leq f(a_0, b_0) \leq f(a_0, b),\ \ \forall (a, b) \in A \times B$$

を満たすなら，$\sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} f(a, b) = \inf\limits_{b \in B} \sup\limits_{a \in A} f(a, b) = f(a_0, b_0)$.

[3] 二重数列 $\{a_{ij} \in \mathbf{R}; i, j = 1, 2, \cdots\}$ が 2 条件;「$a_{ij} = a_{ji} \leq 0$ if $i \neq j$,」「$\sum_{j=1}^\infty a_{ij} \in [0, \infty)$, $\forall i = 1, 2, \cdots$」を満たせば，任意の $n = 1, 2, \cdots$ 及び $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{C}^n$ に対し，$\displaystyle\sum_{i,\, j=1}^n a_{ij} x_i \overline{x_j} \geq 0$ であることを示せ.

[4] $a_1 > b_1 > 0$ とし，実数列 a_n, b_n $(n = 2, 3, \cdots)$ を $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$ によって順次定める．このとき，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ が共に存在して等しいことを示せ.

[5] 実数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ が全ての $m, n \geq 1$ に対し「$a_{m+n} \leq a_m + a_n$」を満たすとき
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n/n = \inf\limits_{n \geq 1} a_n/n$（両辺 $= -\infty$ も許す）を示せ.

ヒント； $m \geq 1$ を任意に固定し，$n \geq m$, $n = mq + r$ (q は n/m の整数部分) とすると $a_n \leq q a_m + a_r$. 従って $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n/n \leq a_m/m$.

[6] 実数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(c_n)_{n=1}^\infty$ が $\lim\limits_{n \to \infty} c_n/n = 0$ かつ全ての $m, n \geq 1$ に対し $a_{m+n} \leq a_m + a_n + c_n$ を満たすとき $\lim\limits_{n \to \infty} a_n/n = \inf\limits_{n \geq 1} (a_n + c_n)/n$（両辺 $= -\infty$ も許す）を示せ.

[7] 数列 $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ について，

$$\sum_{k=1}^n a_k \geq c_0 \sqrt{n},\ \ n \geq 1$$

を仮定する（但し c_0 は n に無関係な正数）．このとき，n に無関係な正数 c_1 が存在し次が成立することを示せ：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq c_1 \log n, \quad n \geq 1.$$

[8] 次を示せ； $\lim_{n\to\infty} \sharp\{n \text{ の正の約数 }\}/n^{\varepsilon} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$

[9] $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$, $C_k = \{0,1,\cdots,k\}^d$ $(k=0,1,\cdots)$ に対して，$N_k^-(\Lambda) = \sharp\{x \in \mathbf{Z}^d;\ x + C_k \subset \Lambda\}$, $N_k^+(\Lambda) = \sharp\{x \in \mathbf{Z}^d;\ (x+C_k) \cap \Lambda \neq \phi\}$ と置く（ただし，$x + \Lambda = \{x+y \in \mathbf{Z}^d; y \in \Lambda\}$, また $\sharp\{\cdots\}$ は 集合 $\{\cdots\}$ に属する点の個数）．集合列 $\Lambda_n \subset \mathbf{Z}^d$ $(n \geq 1)$ が $\forall k \geq 0$ に対し $N_k^-(\Lambda_n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$, $\dfrac{N_k^-(\Lambda_n)}{N_k^+(\Lambda_n)} \stackrel{n\to\infty}{\to} 1$ を満たすとき $\lim_{n\to\infty} \dfrac{N_k^{\pm}(\Lambda_n)}{\sharp(\Lambda_n)} = 1, \quad \forall k \geq 0.$ を示せ．

[10] 有界複素数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し，$S_n = x_1 + \ldots + x_n$ と置く．ある自然数列：$N_1 < N_2 < \cdots$ が $\lim_{l\to\infty} \dfrac{N_{l+1}}{N_l} = 1$, $\lim_{l\to\infty} \dfrac{S_{N_l}}{N_l} = x$ を満たすとき $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = x$ を示せ．

[11] 次を示せ：(i) 非減少自然数列 $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 及び数列 $\{a_{n,m} \in \mathbf{C}\}$ $(n = 1,2,\cdots,\ m = 1,\cdots,p(n))$ は $p(n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$, $\sum_{m=1}^{p(n)} a_{n,m} \stackrel{n\to\infty}{\to} a$, $\sum_{m=1}^{p(n)} |a_{n,m}|^2 \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$ を満たすとする．このとき，$\prod_{m=1}^{p(n)} (1 + a_{n,m}) \stackrel{n\to\infty}{\to} e^a$. (ii) $a, a_n \in \mathbf{C}$ $(n = 1,2,\cdots)$, $a_n \stackrel{n\to\infty}{\to} a$ ならば $\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\to} e^a$.

(i) のヒント：先ず次に注意：$a_j, b_j \in \mathbf{C}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ が絶対値 $\leq M$ なら，$|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j| \leq M^{n-1} \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|$.
これを用いれば，$\prod_{m=1}^{p(n)} (1 + a_{n,m}) - \exp\left(\sum_{m=1}^{p(n)} a_{n,m}\right) \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.$ がわかる．

[12] 非負実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について次を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \downarrow 0 \text{ となる全ての } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ に対して} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty, \end{array} \right.$$

[13] 非負実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について次を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \uparrow \infty \text{ を満たす } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ が存在して} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty, \end{array} \right.$$

[14] $x_n > 0$ $(n = 1,2,\cdots)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ をみたすなら，次を満たす $y_n > 0$ $(n = 1,2,\cdots)$ が存在する；$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^p = \infty, \quad \forall p > 1.$

[15] X を集合とする．$f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ が全て有界で条件：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \sup_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$$

を満たすならば $\forall x \in X$ に対し極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| = 0$ を満たす（要するに「一様 Cauchy 列は一様収束する」）ことを示せ．

[16] $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n \to 0$ とする．次を示せ；関数 $f : (0,1) \to \mathbf{C}$ が存在して任意の $0 < \varepsilon < 1/2$ に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \max_{\varepsilon<\theta<1-\varepsilon} \left| \sum_{n=1}^{N} c_n \exp(2\pi\sqrt{-1}n\theta) - f(\theta) \right| = 0.$$

ヒント: まず固定された $\theta \in (0,1)$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(2\pi\sqrt{-1}n\theta)$ の収束を示した上でこの和を $f(\theta)$ と定義する．その際 **Abel 変形** を用いるとよい；複素数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $\sum_{n=1}^{N} x_n y_n = S_N y_N - \sum_{n=1}^{N-1} S_n(y_{n+1} - y_n)$, ここで $S_n = \sum_{m=1}^{n} x_m$ $(n \geq 1)$.

[17] **Kronecker's lemma**：

複素数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ に対して $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $T_n = \frac{x_1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{x_n}{\lambda_n}$ とおく．$T \in \mathbf{C}$ に対し次を示せ；

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) T_j = T \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda_n} = 0.$$

ヒント；$\displaystyle \frac{1}{\lambda_n} S_n = T_n - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) T_j.$

[18] $\alpha \geq 1$, $D_\alpha = \{z \in \mathbf{C} \mid |1 - z| \leq \alpha(1 - |z|)\}$ とする．(i) D_α は 凸集合（i.e., $0 \leq \lambda \leq 1$, $z, w \in D_\alpha$ ならば $\lambda z + (1-\lambda)w \in D_\alpha$）であり，実軸上の区間 $[0,1]$ を含むこと，更に

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \subset \bigcup_{\alpha\geq 1} D_\alpha \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$$

を示せ．また D_α の概形を描け．(ii) **Abel の定理；** $a_n \in \mathbf{C}$ $(n = 0, 1, \dots)$ に対し級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の収束を仮定する．このとき $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $z \in D_\alpha$ について一様収束することを示し，$f : D_\alpha \to \mathbf{C}$ の連続性を結論せよ．

ヒント；$S_{n,m} = \sum_{j=m+1}^{n} a_j$ とおく．仮定より $\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} |S_{n,m}| = 0$. また，$z \in D_\alpha$ に対し

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j z^j \right| &= \left| S_{n,m} z^n + \sum_{j=m+1}^{n-1} S_{j,m}(z^j - z^{j+1}) \right| \\ &\leq |S_{n,m}| + |1 - z| \sum_{j=m+1}^{n-1} |S_{j,m}|\,|z|^j. \end{aligned}$$

[19] $a_n \in \mathbf{C}$ $(n = 0, 1, \dots)$ に対し $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ を仮定する．以下を示せ；(i) $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$ ならば $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．(ii) **Tauber の定理；**極限 $\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(1 - \frac{1}{n})$ が存在するなら級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し，その値は α に等しい．

ヒント： 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，N が十分大きければ $\sup_{j\ge N} j|a_j| < \varepsilon$. 次に $n \ge N$ とすると

$$
\begin{aligned}
\left| f(z) - \sum_{j=0}^{n} a_j \right| &\le \sum_{j=0}^{n} \left| a_j (z^j - 1) \right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j z^j| \\
&\le |z - 1| \sum_{j=0}^{n} j|a_j| + n^{-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} j|a_j z^j| \\
&\le |z - 1| \sum_{j=0}^{n} j|a_j| + \varepsilon n^{-1} (1 - |z|)^{-1}.
\end{aligned}
$$

そこで $z = 1 - \frac{1}{n}$, $n \to \infty$ とする．

余談；Abel の定理 ([18]) では級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の収束を仮定して $f(z)$ の $z = 1$ における連続性を結論したが，Tauber の定理は，付加条件 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ のもとで Abel の定理の逆も成立することを言っている．なお，Tauber の定理で a_n に対する付加条件を全く外してしまうと次のような反例がある；$(1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ (左辺は $z \to 1$ で極限を持つが，右辺は $z = 1$ に対しては収束しない).

[20] 集合 X, Y と $F : X \times Y \to \mathbf{C}$ について以下を示せ；

(i) $$\sum_{x\in X} \left(\sum_{y\in Y} |F(x,y)| \right) = \sum_{y\in Y} \left(\sum_{x\in X} |F(x,y)| \right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} |F(x,y)|.$$

(ii) (i) の３つの和のいずれか１つ,（したがって全て）が有限なら，

$$\sum_{x\in X} \left(\sum_{y\in Y} F(x,y) \right) = \sum_{y\in Y} \left(\sum_{x\in X} F(x,y) \right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} F(x,y).$$

(iii) $f, g \in l^1(\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{ f : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{C};\ \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} |f(x)| < \infty \}$ とするとき，

$$\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \left(\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} |f(x-y)g(y)| \right) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} |f(x)| \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} |g(y)|.$$

(iv) $f, g \in l^1(\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C})$ に対し和：$f * g(x) = \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} f(x-y)g(y)$ は全ての $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して絶対収束し，$\displaystyle\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} (f*g)(x) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} f(x) \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} g(y)$.

[21] $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ を複素数列，$(c_n)_{n=1}^\infty$ を $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}b_k$ で定義される数列とする．次を示せ；

(i) $\sum_{n=1}^\infty a_n,\ \sum_{n=1}^\infty b_n,\ \sum_{n=1}^\infty c_n$ が全て収束 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty c_n = (\sum_{n=1}^\infty a_n)(\sum_{n=1}^\infty b_n)$.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty,\ \sum_{n=1}^\infty |b_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |c_n| < \infty,\ \sum_{n=1}^\infty c_n = (\sum_{n=1}^\infty a_n)(\sum_{n=1}^\infty b_n)$.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$ かつ $\sum_{n=1}^\infty b_n$ が存在 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty c_n$ が存在，$\sum_{n=1}^\infty c_n = (\sum_{n=1}^\infty a_n)(\sum_{n=1}^\infty b_n)$.

コメント：(ii),(iii) ともに，[20]-(ii) を適用すれば簡単.

[22] $l^1(\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C})$ における演算 $*$ (cf. [20]) について結合律:$(f*g)*h = f*(g*h)$, 可換律: $f*g = g*f$ を示せ．また，演算 $*$ に関する単位元は何か？

[23] 0 を含まない複素数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ について，極限値 $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N a_n$ が存在して 0 でないとき，その値を $(a_n)_{n=1}^\infty$ の**無限積**といい，$\prod_{n=1}^\infty a_n$ で表す．$(a_n)_{n=1}^\infty$ が 0 を含めば，常に $\prod_{n=1}^\infty a_n = 0$ と定義する．以下を示せ；集合 X 上の関数列 $f_n : X \to \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \cdots$ について，

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \text{ が } X \text{ 上一様収束} &\iff \textstyle\prod_{n=1}^\infty (1 + |f_n(x)|) \text{ が } X \text{ 上一様収束} \\
&\Rightarrow \textstyle\prod_{n=1}^\infty (1 + f_n(x)) \text{ が } X \text{ 上一様収束.}
\end{aligned}
$$

特に $a_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \cdots$ について $f_n(x) \equiv a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ を考えることにより，

$$
\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty \iff \prod_{n=1}^\infty (1 + |a_n|) \text{ が収束} \quad \Rightarrow \prod_{n=1}^\infty (1 + a_n) \text{ が収束}
$$

ヒント： $x \geq 0$ が十分小なら，$e^{\frac{x}{2}} \leq 1 + x \leq e^x$.

[24] (i) $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ は恒等的に 0 ではなく，次の (a),(b) を満たすとする；

(a) $m, n \in \mathbf{N}^*$ が互いに素 $\Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$,

(b) $\sum_{p:\ \text{素数}} \sum_{r=1}^\infty |f(p^r)| < \infty$.

$\sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$ 及び $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \prod_{p:\ \text{素数}} \left(1 + \sum_{r=1}^\infty f(p^r)\right)$ を示せ.

(ii) **Euler の等式；** 「$\sum_{n=1}^\infty n^{-s} = \prod_{p:\ \text{素数}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$.」を導け；

[25] 次を示せ；$\displaystyle\sum_{p:\ 素数} p^{-1} = \infty$.

ヒント； Euler の等式 ([24]) で $s \searrow 1$ とし，$\prod_{p:\ 素数}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\infty$ を示した上で無限和と無限積の関係（[23]）に注意せよ.

[26] $f \in l^1(\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対して $\hat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ を次のように定義する：

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} f(x) \exp(-2\pi\sqrt{-1}x\theta).$$

以下を示せ；(i) $\widehat{f}$ は周期 1 をもつ連続関数. (ii) $|\widehat{f}(\theta)| \le \sum_{x\in\mathbf{Z}} |f(x)|$.
(iii) $f(x) = \int_0^1 \widehat{f}(\theta)\exp(2\pi\sqrt{-1}x\theta)d\theta$.

[27] 問題 [26] の続き
以下を示せ；(i) $f, g \in l^1(\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$. (ii) $n = 0, 1, \ldots$ に対し $f^{*n}(x) = \int_0^1 \widehat{f}(\theta)^n \exp(2\pi\sqrt{-1}x\theta)d\theta$, 但し $f^{*0}(x) \equiv \delta_{x,0}$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$, $(n \ge 1)$. (iii) $\sum_{x\in\mathbf{Z}} |f(x)| < 1$ を仮定すると，$\sum_{n=0}^\infty f^{*n}(x) = \int_0^1 \frac{\exp(2\pi\sqrt{-1}x\theta)d\theta}{1-\widehat{f}(\theta)}$.

[28] 問題 [26] の多次元への一般化；
$f \in l^1(\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C})$ に対して $\widehat{f} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ を次のように定義する：

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} f(x)\mathbf{e}_{-x}(\theta), \quad 但し\ \mathbf{e}_x(\theta) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^d x_j\theta_j\right).$$

以下を示せ;(i) $\widehat{f}$ は連続かつ $\delta_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^d \in \mathbf{Z}^d$ $(j = 1, \ldots, d)$, $\theta \in \mathbf{R}^d$ に対し，$\widehat{f}(\theta+\delta_j) = \widehat{f}(\theta)$.
(ii) $|\widehat{f}(\theta)| \le \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} |f(x)|$. (iii) $f(x) = \int_{[0,1]^d} \widehat{f}(\theta)\mathbf{e}_x(\theta)d\theta$.

[29] 問題 [28] の続き
以下を示せ；(i) $f, g \in l^1(\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C})$ に対し $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$. (ii) $n = 0, 1, \ldots$ に対し $f^{*n}(x) = \int_{[0,1]^d} \widehat{f}(\theta)^n \mathbf{e}_x(\theta)d\theta$, 但し $f^{*0}(x) \equiv \delta_{x,0}$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$, $(n \ge 1)$. (iii) $\sum_{x\in\mathbf{Z}} |f(x)| < 1$ を仮定すると，$\sum_{n=0}^\infty f^{*n}(x) = \int_{[0,1]^d} \frac{\mathbf{e}_x(\theta)d\theta}{1-\widehat{f}(\theta)}$.

[30] D を距離空間 X の稠密な部分集合とする．D の点からなる任意の Cauchy 列が X に極限を持てば X は完備であることを示せ.

[31] $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数全体 $C^0([0, 1])$ に距離を

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で入れると，$(C^0([0, 1]), d)$ は完備距離空間であることを示せ．また単位球 $\{f|d(0, f) \le 1\}$ は compact でないことを示せ.

[32] X は複素数列全体からなる空間で $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in X$ に対して

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

とおくとき

(1) (X,d) は完備距離空間である．

(2) X の閉集合 E について，
E が compact $\Leftrightarrow \forall k\ \exists M_k > 0$ s.t. $|x_k| \le M_k \quad (x = \{x_n\} \in E)$.

[33] (X,d) を 完備距離空間とする．($X \supset A \neq \emptyset$ に対し，$d(A) = \sup\{d(x,y); x,y \in A\}$ とおく．) このとき次を示せ．

(1) $\{B_n\}$ を $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ かつ $\lim_{n\to\infty} d(B_n) = 0$ なる空でない閉部分集合の列とする．このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$ を示せ．

(2) $\{A_n\}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ となる閉部分集合の族とする．このとき少なくとも 1 個の A_n は内点を持つことを示せ．

(3) X を [31] の距離空間とする．このとき X の閉部分集合の列 $\{B_n\}$ で $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $d(B_1) < \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} d(B_n) > 0$ を満たすが $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ となるものを一つ与えよ．

[34] (1) 正整数 n に対し，[33] の距離空間 $C^0([0,1])$ の部分集合 C_n を以下のように定義する．

$$C_n = \{f \in C^0([0,1]); \exists a \in [0,1] \text{ s.t. } |f(y) - f(a)| \le n|y-a| \quad (y \in [0,1])\}.$$

このとき C_n は内点を持たない閉部分集合であることを示せ．

(2) (1) および [33] (2) を用いて，$[0,1]$ 上のどの点においても微分不可能な連続関数が存在することを示せ．

（ヒント： $C^0([0,1]) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ の元を考えよ．）

[35] **多項式近似定理**
$f \in C([0,1] \to \mathbf{C})$ に対し $B_n(x;f) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r (1-x)^{n-r}$ を Bernstein 多項式という．$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} |B_n(x;f) - f(x)| = 0$ を示せ．

[36] **Dini の第 2 定理**
$-\infty < a < b < \infty$, $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ とする．各 $n = 1,2,\ldots$ に対し $f_n : I \to \mathbf{R}$ は単調増加関数であり，各 $t \in I$ に対し $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ が存在して連続と仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)| = 0$ を示せ．

[37] 関数 $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ が非減少 ($s < t \Rightarrow \varphi(s) \le \varphi(t)$) なら，φ の不連続点は高々可算個しかないことを示せ．

ヒント： 非加算無限個の正数の和は必ず発散する

[38] $-\infty \le a < s < t < b \le \infty$, $f \in C((a,b) \to \mathbf{R})$ とするとき次を示せ；

$$\inf_{a<x<b} \underline{D}^+ f(x) \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \sup_{a<x<b} \overline{D}^+ f(x).$$

ここで，$\overline{D}^+ f(x) = \overline{\lim_{h\to 0+}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\underline{D}^+ f(x) = \underline{\lim_{h\to 0+}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

ヒント： 例えば不等式右側を示すには次が言えれば良い．$\exists s_n \in (a,b)$, $\exists h_n \downarrow 0$,

$$\sup_{a<s<t<b} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n+h_n)-f(s_n)}{h_n}.$$

[39] (X,d) を距離空間とする．空でない部分集合 A, B に対し

$$d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$$

とおく．A が compact，B が閉集合で $A\cap B=\emptyset$ ならば，$d(A,B)>0$ であることを示せ．A が単に閉集合だけのときはこのことは成り立たない例をあげよ．

[40] (X,d) を距離空間とし，$f\colon\ \longrightarrow X$ は連続であるとする．

(1) 各 compact 集合 K に対して $f^{-1}(K)$ は compact であると仮定すると，f は閉写像，すなわち閉集合の像はつねに閉集合であることを示せ．

(2) (1) での仮定を「各 $y\in Y$ に対して $f^{-1}(\{y\})$ は compact」とするとどうか．

[41] (X,d) を完備距離空間，$f\colon X\longrightarrow X$ が次の条件

$$\exists a\in(0,1)\quad \text{s.t.}\quad d(f(x),f(y))\le a\,d(x,y)\quad (\forall x,y\in X)$$

をみたすとき，次を示せ．

(1) $x_0\in X$, $x_n=f(x_n)$ $(n\ge 1)$ で定まる点列 $\{x_n\}$ は Cauchy 列となる．

(2) $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ は x_0 のとり方によらない．

(3) f は唯一つの不動点 (i.e., $f(x)=x$ となる点 $x\in X$) をもつ．

[42] (X,d) を完備距離空間，$f\colon X\longrightarrow X$ が次の条件

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y)\quad (\forall x,y\in X,\ x\ne y)$$

をみたすとき，次を示せ．

(1) f が不動点を持たないような (X,d), f の例を挙げよ．

(2) X が compact ならば f は唯一つの不動点を持つことを示せ．

(ヒント: 写像 $x\mapsto d(x,f(x))$ を考えてみよ．)

[43] (X,d) を compact 距離空間，$f\colon X\longrightarrow X$ が $d(f(x),f(y))\ge d(x,y)$ $(\forall x,y\in X)$ をみたすとき，$F_x=\{f^n(x);\, n=1,2,3,\dots\}$ とする．このとき次を示せ．

(1) $\forall x\in X$ に対し，$x\in\overline{F}_x$．　($\overline{F}_x$ は F_x の閉包)

(2) $d(f(x),f(y))=d(x,y)$,　$(\forall x,y\in X)$

(3) $f(X)=X$

(ヒント: (2) 数列 $\{d(f^n(x),f^n(y))\}$ を考えてみよ．)

[44] $k\in C^0([0,1]\times[0,1])$ が $|k(x,y)|<1$ $(\forall x,y\in[0,1])$ を満たすとする．このとき任意の $g\in C^0([0,1])$ に対して

$$f(x)=g(x)+\int_0^1 k(x,y)f(y)dy\quad (x\in[0,1])$$

を満たす $f\in C^0([0,1])$ がただひとつ存在することを示せ．

[45] $A > 0$, $q \in C^0([0,A])$, $a, b \in \mathbf{C}$ とする．次の初期値問題

$$(*) \begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (x \in [0,A]), \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$$

に対し以下に答えよ．

(1) $(*)$ の解 $y \in C^2([0,A])$ は $y_0(x) = a + bx$ とおくと

$$y(x) = y_0(x) + \int_0^x (x-t)q(t)y(t)dt, \quad (x \in [0,A])$$

をみたし，逆にこの積分方程式の解 $y \in C^0([0,A])$ は $y \in C^2([0,A])$ となり，$(*)$ をみたす．

(2) $(*)$ は $C^2([0,A])$ 内に唯一つの解をもつ．

[46] (X,d) は距離空間，$X \supseteq A \neq \emptyset$, $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ は Lipschitz 連続，すなわち

$$\exists K \geq 0 \text{ s.t. } |f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y) \quad (x, y \in A)$$

が成り立つ．

$$f_y(x) = f(y) + K\,d(x,y) \quad (x \in X, y \in A), \quad g(x) = \inf_{y \in A} f_y(x) \quad (x \in X)$$

とおく．このとき

(1) $g(x)$ は有限.

(2) $g(x) = f(x) \quad (x \in A)$.

(3) $|g(x) - g(y)| \leq K\,d(x,y), \quad (x, y \in X)$.

[47] (X,d) は compact 距離空間，$f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続とする．このとき $\forall \varepsilon > 0, \exists g$ s.t.

(1) $g\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ は Lipschitz 連続.

(2) $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in X)$.

[48] 距離空間 $X = (X,d)$ における点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ついて次の (a), (b) は同値である．

(a) $x_n \to x \in X$，即ち $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

(b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ から更に部分列 $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$ が選べて，$x''_n \to x$.

[49] (X,d) を距離空間，$A \subset X$ とする．次の命題 (a), (b) は同値であることを示せ；

(a) A は全有界.

(b) $\forall \varepsilon > 0$ に対し，全有界集合 B_ε が存在し，$A \subset \{x \in X \mid \inf_{b \in B_\varepsilon} d(x,b) < \varepsilon\}$.

[50] X を距離空間とするとき，$f, f_n \in C(X \to \mathbf{C})$ $n = 1, 2, \cdots$ について次の 2 つは同値である；

(a) 任意の収束列 $x_n \to x$ に対して，$f_n(x_n) \to f(x)$.

(b) X の任意の compact subset K に対して $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|=0.$

[51] X を compact 位相空間，$f_n \in C(X\to\mathbf{R})$ $(n=1,2,\cdots)$ は $\forall x\in X$ で，

$$f_1(x)\geq f_2(x)\geq\cdots\geq f_n(x)\geq\cdots\geq\inf_{n\geq 1}f_n(x)>-\infty$$

を満たしているとする．次を示せ:

(1) $\sup_{x\in X}\inf_{n\geq 1}f_n(x)=\inf_{n\geq 1}\sup_{x\in X}f_n(x).$

(2) **Dini の定理:** $f(x)=\inf_{n\geq 1}f_n(x)$ が連続関数なら $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0.$

[52] (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とするとき，$f:X\to Y$ が一様連続とは性質

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ (x,x'\in X,\ d_X(x,x')<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon)$$

を持つことであるとし，一様連続写像全体を $C_{\mathrm{unif}}(X\to Y)$ と記す．

X,Y を距離空間，$\varphi:X\to Y$ を同相写像とする．以下を示せ．

(1) 「X は完備 $\Rightarrow$ Y は完備」とならない例を作れ．

(2) 「X は全有界 $\Rightarrow$ Y は有界」とならない例を作れ．

(3) φ^{-1} が一様連続なら「X は完備 $\Rightarrow$ Y は完備」

(4) φ が一様連続なら「X は全有界 $\Rightarrow$ Y は全有界」

[53] 問題 [52] で φ,φ^{-1} をともに一様連続と仮定する.「X が有界 $\Rightarrow$ Y が有界」か？

[54] X は局所 compact Hausdorff 位相空間で可算開基底をもつとする．以下を示せ；

(1) Compact 集合列 $K_1\subset K_2\subset\ldots\subset X$ で次を満たすものが存在する；$\cup_{n\geq 1}K_n=X$ かつ任意の compact 集合 $K\subset X$ に対し $n\geq 1$ が存在し，$K\subset K_n$.

(2) Y を距離空間とし，$f,g\in C(X\to Y)$ に対し

$$\begin{aligned} D_n(f,g) &= \sup_{x\in K_n}d_Y(f(x),g(x)),\quad n=1,2,\ldots, \\ D(f,g) &= \sum_{n\geq 1}2^{-n}\min\{1,\ D_n(f,g)\} \end{aligned}$$

とおく．このとき，$D(f,g)$ は $C(X\to Y)$ 上の距離関数である．

(3) $f_m,f\in C(X\to Y)$ とする．$\lim_{m\to\infty}D(f_m,f)=0$ は「f_m が f に局所一様収束する」ことと同値である．

[55] $J\subset\mathbf{R}$ を長さ有限の閉区間，I を J を含む開区間とする．次を示せ；

(1) $f\in C^1(I\to\mathbf{C})$ ならば $\lim_{h\to 0}\max_{x\in J}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=0.$

(2) $f \in C^m(I \to \mathbf{C})$ ならば $\lim_{h\to 0} \max_{x\in J} \left| h^{-m}\Delta^m f(x;h) - f^{(m)}(x) \right| = 0$. ここで

$$\Delta^m f(x;h) = \begin{cases} f(x) & (m=0) \\ \Delta^{m-1} f(x+h;h) - \Delta^{m-1} f(x;h) & (m \geq 1.) \end{cases}$$

[56] $f \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ に対し次を示せ：
$\|f'\|_\infty^2 \leq 4\,(\sup(f) - \inf(f))\,\|f''\|_\infty$. 但し $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$.

ヒント $\varepsilon > 0,\, t \in \mathbf{R}$ に対し $c(t,\varepsilon) \in [t-\varepsilon, t]$ が存在して，$f(t) - f(t-\varepsilon) = \varepsilon f'(c(t,\varepsilon))$. 従って，$f'(t) = \dfrac{f(t) - f(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + \displaystyle\int_{c(t,\varepsilon)}^t f''$.

[57] 次を示せ：

(1) $\left| e^t - \displaystyle\sum_{\nu=0}^n t^\nu/\nu! \right| \leq |t|^{n+1} e^{|t|}/(n+1)! \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

(2) e は有理数でないことを示せ.

(2) のヒント：$e = p/q\ (p,q \in \mathbf{N})$ と仮定すると (1) で $t=1$ とした式から，
$\left| p - qn! \displaystyle\sum_{\nu=0}^n 1/\nu! \right| \leq qe/(n+1)$ となる.

[58] 円周率 π が無理数であることを示せ.

ヒント；$\pi = p/q\ (p,q \in \mathbf{N})$ と仮定して次の順番で矛盾を導く；

(1) $f_n(x) = x^n(p-qx)^n/n!$ と置くと，$f_n^{(k)}(0),\ f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbf{Z},\ \ \forall n = 0,1,\cdots,\ \forall k = 0,1,\cdots$.

(2) $I_n \stackrel{\text{def.}}{=} \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \sin x dx \in \mathbf{Z}\ \ \forall n = 0,1,\cdots$.

(3) 十分大きな n に対して $0 < I_n < 1$.

[59] $\phi, \psi \in C((0,1] \to (0,\infty))$ とする．$\dfrac{\phi}{\psi}$ が非減少なら $t \mapsto \dfrac{\int_0^t \phi(s)ds}{\int_0^t \psi(s)ds}$ も非減少であることを示せ.

[60] $\alpha \in \mathbf{R},\, f \in C([0,\infty) \to \mathbf{R}),\, T_n \nearrow \infty$ とする．以下を示せ：

(1) $\alpha \leq \varliminf_{n\nearrow\infty} \dfrac{1}{T_n}\displaystyle\int_0^{T_n} f(t)dt \Rightarrow \exists s_n \nearrow \infty,\, \alpha \leq \varlimsup_{n\nearrow\infty} f(s_n)$.

(2) $\varlimsup_{n\nearrow\infty} \dfrac{1}{T_n}\displaystyle\int_0^{T_n} f(t)dt \leq \alpha \Rightarrow \exists t_n \nearrow \infty,\ \varliminf_{n\nearrow\infty} f(t_n) \leq \alpha$.

(3) $\lim_{n\nearrow\infty} \dfrac{1}{T_n}\displaystyle\int_0^{T_n} f(t)dt = \alpha \Rightarrow \exists c_n \nearrow \infty,\ \lim_{n\nearrow\infty} f(c_n) = \alpha$.

[61] $I \subset \mathbf{R}$ は長さ $|I| < \infty$ の閉区間，$f \in C^1(I \to \mathbf{C})$ とする．このとき，任意の $p, q \in [1, \infty]$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ；$\|f - f_I\|_p \le |I|^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f'\|_q$. 但し $\|\cdot\|_p$ は I 上の L_p-norm, $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f$.

[62] $f \in C^1([0, b] \to \mathbf{R})$ $(b > 0)$ が 0 および b の近傍で $f \equiv 0$ となるなら，

$$\frac{1}{4}\int_0^b \frac{|f(x)|^2}{d(x)^2} dx \le \int_0^b |f'(x)|^2 dx.$$

ただし $d(x) = \min(|x|, |b - x|)$.

[63] 関数 $l_n : [e_n, \infty) \to [1, \infty)$ $(n \ge 1)$ を $e_n = \underbrace{\exp \circ \cdots \circ \exp}_{n}(1)$, $l_n(x) = \underbrace{\log \circ \cdots \circ \log}_{n}(x)$ によって定義する．任意の n に対し次を示せ：

$$\int_{e_n}^{\infty} \frac{dx}{x l_1(x) \cdots l_{n-1}(x) l_n(x)^{1+\varepsilon}} \begin{cases} < \infty & \text{if } \varepsilon > 0, \\ = \infty & \text{if } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

ヒント：左辺を I_n とする．$x = e^y$ と変数変換すると $I_n = I_{n-1} = \cdots = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$.

[64] $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ に対し以下を示せ：

(1) $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) dx$ は有限確定,

(2) $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \int_0^b |f(x)| dx = \infty$.

ヒント: (1) $f(0) = 1$ と解釈すれば f は $[0, 1]$ 上連続．一方，極限 $\displaystyle\lim_{b \nearrow \infty} \int_1^b f$ の存在はうまく部分積分すれば判る．

[65] $f \in C([0, \infty) \to \mathbf{R})$ に対し広義 Riemann 積分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ の存在を仮定する．このとき，$\forall a > 0$ に対し広義 Riemann 積分 $\int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx$ が存在すること，及び次を示せ：

$$\lim_{a \searrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx, \quad \lim_{a \nearrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx = 0.$$

ヒント: 部分積分で次を示す；

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) dx = a \int_0^{\infty} e^{-ab} \left(\int_0^b f(x) dx \right) db = \int_0^{\infty} e^{-b} \left(\int_0^{b/a} f(x) dx \right) db.$$

[66] 以下を示せ：

(1) $\forall a > 0$ に対し $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ヒント：(1) では両辺を a について微分したものが同じであることと，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}$ (左辺) $= 0$ を示せばよい．(2) では (1) の両辺の $a \downarrow 0$ の極限を考える．左辺に問題 [65] を使え．

[67] (1) $0 < \alpha < 2$ のとき，広義 Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ は収束することを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}y^{\alpha-1}dy = \Gamma(\alpha)x^{-\alpha}$ $(x > 0)$ を利用して $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ を求めよ．

[68] $r = 0, 1, \cdots, \infty$ に対して，

$$C^r(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}) = \{f \in C^r(\mathbf{R} \to \mathbf{C});\ \ f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}\}.$$

また，$f \in C^0(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し，

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1}|f(x)|, \\
\|f\|_2 &= \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \\
\widehat{f}(n) &= \int_0^1 f(x)\overline{\mathbf{e}_n}(x)dx, \quad (n \in \mathbf{Z}), \\
S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\mathbf{e}_k(x), \quad (n = 0, 1, \ldots)
\end{aligned}$$

とおく．但し，$\mathbf{e}_\xi(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x\xi)$, $(\xi \in \mathbf{R})$. $f \in C^r(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し以下を示せ：

(1) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|_2^2$, 従って特に，$\displaystyle\lim_{|n|\to\infty}|\hat{f}(n)| = 0$.

(2) $\widehat{f^{(r)}}(n) = (2\pi\sqrt{-1}n)^r\hat{f}(n)$.

(3) $r \ge 1$ に対し $\displaystyle\sum_{|k|\ge n}|\hat{f}(k)| \le \|f^{(r)}\|_2 \left\{\sum_{|k|\ge n}(2\pi|k|)^{-2r}\right\}^{1/2}$.

(4) $f \in C^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}\|S_n f - S_m f\|_\infty = 0$. ([69]-(6) 参照)

(1) のヒント：$\displaystyle\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|k|\le n}|\hat{f}(k)|^2$.

[69] Dirichlet 核：$D_n = \sum_{k=-n}^{n}\mathbf{e}_k$ について (cf. [68]) 以下を示せ：

(1) $\displaystyle\int_0^1 D_n(x)dx = 1$

(2) $D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\pi(2n+1)x}{\sin\pi x} & x \ne 0, \\ 2n+1 & x = 0. \end{cases}$

(3) D_n のグラフは大体どんな形か？

(4) $f \in C^0(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $(S_n f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-y) D_n(y) dy$

(5) $f \in C^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し，

$$(S_n f - f)(x) = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} \left\{ (q_x \mathbf{e}_{-1/2})^\wedge(n) - (q_x \mathbf{e}_{1/2})^\wedge(-n) \right\}$$

但し $q_x(y) = \begin{cases} \dfrac{(f(x-y) - f(x))}{\sin \pi y}, & y \neq 0, \\ -\dfrac{f'(x)}{\pi}, & y = 0. \end{cases}$

(6) $f \in C^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ なら， $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \|S_n f - f\|_\infty = 0$. ((5) と [68]-(1), (4) からの結論．)

[70] Fejer 核：$F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k$ について（cf. [69]）以下を示せ:

(1) $\displaystyle\int_0^1 F_n(x) dx = 1,$

(2) $F_n(x) = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{\sin \pi n x}{\sin \pi x} \right)^2,$

(3) F_n のグラフは大体どんな形か？

(4) $f \in C(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (S_k f)(x) = \int_0^1 f(x-y) F_n(y) dy.$

(5) $f \in C(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f - f \right\|_\infty = 0.$

(6) $\{\mathbf{e}_n;\ n \in \mathbf{Z}\}$ の $\mathbf{C}$-linear span は $(C(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$ の中で dense である ((5) の帰結).

[71] 一様分布数列, Weyl の定理：

実数列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\forall f \in C^0(\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ に対し $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx$ を満たすとき，$(x_n)_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上**一様分布**するという．以下を示せ：

(1) $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上 一様分布 $\Rightarrow$ $(x_n - [x_n])_{n=1}^\infty$ は区間 $[0, 1)$ で稠密.

(2) $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上 一様分布する $\iff$ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(2\pi \sqrt{-1} m x_j) = 0, \quad \forall m \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}.$

ヒント： [70]-(6)

(3) **Weyl の定理**：$\alpha \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \{n\alpha\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上 一様分布.

[72] 独立確率変数列の数学的構成：

A を有限集合，$p_\alpha > 0$ $(\alpha \in A)$ は $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} p_\alpha = 1$ を満たすとする．また $\Omega = [0, 1]$ に対し $\Gamma \subset \Omega$ の

確率を $P[\Gamma]=\int_\Gamma d\omega$ で定義する（積分が意味をもつとき）．この問題の目的は関数 $X_n:\Omega\to A$（$n=1,2,\dots$）であって性質；

$$P(\omega;X_j(\omega)=\alpha)=p_\alpha,\quad \forall\alpha\in A, \tag{1}$$

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^n\{\omega;X_j(\omega)=\alpha_j\}\Big)=\prod_{j=1}^n P(\omega;X_j(\omega)=\alpha_j),\quad \forall\alpha_j\in A \tag{2}$$

を満たすものの構成である．これは「コインを何度も投げる」といった独立試行の数学的表現である．例えばコイン投げ続けて， X_n が n 回目に 表か裏かを表わす ($A=\{$ 表, 裏 $\}$, $p_\alpha\equiv 1/2$) と思えば，(1), (2) はその表現としてふさわしい．

$\Omega=[0,1]$ の閉部分区間の列 $\{I_{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n};\ n\geq 1,\ \alpha_j\in A\}$ を次のように定める；まず Ω を閉区間 I_{α_1} ($|I_{\alpha_1}|=p_{\alpha_1}$, $\alpha_1\in A$) に分割する．次に各 I_{α_1} を閉区間 $I_{\alpha_1\alpha_2}$ ($|I_{\alpha_1\alpha_2}|=p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}$, $\alpha_2\in A$) に分割，以後は同様の手順を繰り返す．$X_n:\Omega\to A$ を

$$X_n(\omega)=\alpha\quad\text{if}\ \ \omega\in\bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\in A} I_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1},\alpha} \tag{3}$$

と定義するとき，(1), (2) を示せ．

[73] 大数の (弱) 法則：
X_n ($n=1,2,\dots$) を $\{0,1\}$ に値をとる独立確率変数で $n=1,2,\dots$ に対し $P(X_n=1)=p$ とする（成功確率 p の独立試行列と呼ぶ；問題 [72] で $A=\{0,1\}$, $p_1=p$ としたもの）n 回までの成功回数：$S_n(\omega)\stackrel{\text{def.}}{=}\sum_{j=1}^n X_j(\omega)$ について以下を示せ

(1) $\displaystyle\int_\Omega\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-p\right|^2 d\omega\leq\frac{p(1-p)}{n}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P\left[\omega;\ \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-p\right|\leq\delta\right]=1,\quad\forall\delta>0.$

(1) のヒント：$\int_I(X_i(\omega)-p)(X_j(\omega)-p)d\omega=\delta_{ij}p(1-p)$

(2) のヒント：$P\left[\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\delta\right]=P\left[\left|\frac{S_n}{n}-p\right|^2\geq\delta^2\right]\leq\delta^{-2}\int_\Omega\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-p\right|^2 d\omega.$

[74] 多項式近似定理（問題 [35]）を大数の法則（問題 [73]）を用いて示せ．

ヒント：[73] の S_n について，$\displaystyle\int_I f(S_n(\omega)/n)d\omega=\sum_{r=0}^n f(r/n)\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}.$

[75] $f\in C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n)$ が次の条件を満たせば全射である：$\displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)-x|<\infty.$

[76] 一般化された Leibniz の公式：
$\alpha=(\alpha_j)_{j=1}^n$, $\beta=(\beta_j)_{j=1}^n\in\mathbf{N}^n$, $|\alpha|=\displaystyle\sum_{j=1}^n\alpha_j$, $\alpha!=\displaystyle\prod_{j=1}^n(\alpha_j!)$, $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，「$\alpha\leq\beta\stackrel{\text{def}}{\iff}\alpha_j\leq\beta_j,\ \ \forall j=1,\cdots,n$」とする．$\alpha\in\mathbf{N}^n$, $f,\ g\in C^{|\alpha|}(\mathbf{R}^n\to\mathbf{C})$ に対し $D^\alpha(fg)=\displaystyle\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta fD^{\alpha-\beta}g$ を示せ．

[77] $f, g \in C^m(\mathbf{R}^n \to \mathbf{C})$ のとき Taylor の公式を示せ：

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le m-1} D^\alpha f(x) \frac{h^\alpha}{\alpha!} + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^{m-1} D^\alpha f(x+\theta h) d\theta.$$

但し $z = (z_j)_{j=1}^n \in \mathbf{C}^n$ 　に対し，$z^\alpha = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_j}$.

[78] f は $|z| \le R$ で連続，$|z| < R$ で正則とする．積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| < R)$$

などを用いて次を示せ．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{2} f(0) + \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\varphi \quad (z = re^{i\theta},\ 0 \le r < R,\ \zeta = Re^{i\varphi})$

(2) $\dfrac{1}{2}\overline{f(0)} = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(\zeta)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\varphi \quad (z = re^{i\theta},\ 0 \le r < R,\ \zeta = Re^{i\varphi})$

(ヒント: (2) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta}{\zeta - z_0} d\zeta,\ z_0 = \frac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}}$)

[79] f は $|z| \le 1$ で連続，$|z| < 1$ で正則とする．このとき次を示せ．

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \overline{f(0)} & (|z| < 1) \\ \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{\overline{z}})} & (|z| > 1) \end{cases}$$

[80] f は $|z| < R$ で正則とする．このとき次を示せ．

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \{\mathrm{Re}\, f(re^{i\theta})\} e^{-in\theta} d\theta \quad (0 < r < R,\ n > 0)$$

[81] $R > 0$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C};\, |z| < R\}$, $\Omega_+ = \{z \in \Omega;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\Gamma = (-R, R)$, f は $\Omega_+ \cup \Gamma$ で連続，Ω_+ で正則，$\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ $(z \in \Gamma)$ とする．このとき

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in \Omega,\ \mathrm{Im}\, z \ge 0) \\ \overline{f(\overline{z})} & (z \in \Omega,\ \mathrm{Im}\, z < 0) \end{cases}$$

は Ω で正則になることを示せ．
ヒント： Morera の定理

[82] $0 < r < R$, $\Omega_+ = \{z \in \mathbf{C};\, r < |z| < R\}$, $\Omega_- = \{z \in \mathbf{C};\, R < |z| < \frac{R^2}{r}\}$, $\Gamma = \{z \in \mathbf{C};\, |z| = R\}$, $\Omega = \Omega_+ \cup \Gamma \cup \Omega_-$, f は $\Omega_+ \cup \Gamma$ で連続，Ω_+ で正則，$\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ $(z \in \Gamma)$ とする．このとき

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in \Omega_+ \cup \Gamma) \\ \overline{f(\frac{R^2}{\overline{z}})} & (z \in \Omega_-) \end{cases}$$

は Ω で正則になることを示せ．

[83] $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ はともに $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ のとき絶対収束，$h(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i(\theta-\varphi)}g(e^{i\varphi})d\varphi \quad (z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とする．このとき

(1) h は $|z| = 1$ 上で連続.

(2) $a_n = b_n = 0$ $(n < 0)$ ならば h の $|z| < 1$ への正則な拡張 H_1 が存在する.

(3) $a_n = b_n = 0$ $(n > 0)$ ならば h の $|z| > 1$ への正則な拡張 H_2 が存在する.

(注意: 領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の関数 $\varphi(z)$ の Ω への拡張 $\Phi(z)$ とは,「$\Phi(z)$ は $\bar{\Omega}$ で連続，Ω で正則，$\Omega(z) = \varphi(z)$ $(z \in \partial\Omega)$」が成り立つことである.）

[84] $a, b \in \mathbf{C}$, $0 < |a| < |b|$ のとき，$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ の円環 $|a| < |z| < |b|$ における Laurent 展開を求めよ.

[85] $z_0 \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z_0 > 0$ のとき，$f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ の円環 $|1-z_0| < |z-z_0| < |1+z_0|$ における Laurent 展開を求めよ.

[86] (1) $f(w,z) = \exp\Big\{\dfrac{w}{2}(z - \dfrac{1}{z})\Big\}$ $(w, z \in \mathbf{C},\ z \neq 0)$ は $f(w,z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(w)$ と展開できる. ここに $J_n(w) = \displaystyle\sum_k \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\Big(\frac{w}{2}\Big)^{n+2k}$ $(k \geq 0,\ k+n \geq 0$ となる k についての和). さらに $J_n(w)$ は $\mathbf{C}$ で正則である.

(2) $J_n(w) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(w\sin\theta - n\theta)d\theta.$

ヒント: (1) $f(w,z) = (\exp\{\frac{wz}{2}\}$ のべき級数展開$)\times(\exp\{-\frac{w}{2z}\}$ のべき級数展開) を計算し，z^n について整理.
(2) $J_n(w)$ は (z の関数としての) $f(z,w)$ の Laurent 展開の係数.

[87] (1) 領域 Ω で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ について「$f(z)g(z) = 0$ $(z \in \Omega)$」 ならば 「$f = 0$ または $g = 0$」

(2) 領域 Ω で正則な関数 $f(z)$ と $f(\Omega)$ を含む領域で正則な関数 $g(z)$ について「$g(f(z)) = 0$ $(z \in \Omega)$」 ならば 「$f =$ 定数 または $g = 0$」

[88] $a_n(t)$ $(n \geq 0)$ は $t \in [0,1]$ を変数とする複素数値関数，級数 $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)z^n$ は $0 \leq t \leq 1$, $z \in \mathbf{C}$, $|z| < R$ で収束するとする.（ただし $0 < R \leq \infty$ で R は t に無関係とする.）このとき次を示せ：

(1) $f(t,z)$ が $0 \leq t \leq 1$, $|z| < R$ で連続ならば，各 $a_n(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で連続.

(2) $f(t,z)$ が $0 \leq t \leq 1$, $|z| < R$ で有界，各 $a_n(t)$ が $0 \leq t \leq 1$ で連続ならば，$f(t,z)$ は $0 \leq t \leq 1$, $|z| < R$ で連続.

ヒント：(1) $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ の係数 c_n は $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=r}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ と表される．

(2) $0<r<R$ とするとき，$f_N(t,z)=\sum_{n=0}^{N}a_n(t)z^n$ $(N\geq 0)$ は $0\leq t\leq 1$, $|z|<R$ で一様収束する．

[89] べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ の収束半径を R_0 $(0<R_o\leq\infty)$ とする．このとき次を示せ．

(1) $u(z)$ を $|z|<R$ (ただし，$\dfrac{1}{R_0}<R\leq\infty$) で正則な関数とするとき，$g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}u^{(n)}(z)$ は $z=0$ のある近傍で一様収束する．

(2) $u(z)$ が整関数ならば $g(z)$ も整関数である．

[90] $D\subset\mathbf{C}$ を領域，$f:D\longrightarrow\mathbf{C}$ を正則とする．以下を示せ：

(1) $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u(z)}{\partial x} & \frac{\partial u(z)}{\partial y}\\ \frac{\partial v(z)}{\partial x} & \frac{\partial v(z)}{\partial y}\end{pmatrix}=|f'(z)|^2$, 但し u,v は f の実部, 虚部 また x,y は z の実部, 虚部を表わす．

(2) f の像 $\{f(z)|\ z\in D\}$ が $\mathbf{C}$ の開集合を含まないならば f は定数関数である．

[91] $n\in\{0,1,\ldots\}$, $R>0$ とし，正則関数 $f:\{z\in\mathbf{C};|z|>R\}\longrightarrow\mathbf{C}$ は次を満たすと仮定する．$\displaystyle\sup_{|z|>R}(1+|z|)^{-n}|f(z)|<\infty$. 以下を示せ：

(1) $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty}f^{(n+1)}(z)=0$.

(2) 特に f が整関数なら，f は高々 n 次の多項式である (Liouville の定理の一般化).

(1) のヒント：$|z|>2R, r(z)=|z|-2R$ とすると，$|f^{(n+1)}(z)|\leq(n+1)!\displaystyle\int_0^1\frac{|f(z+r(z)e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})|}{r(z)^{n+1}}d\theta$.

[92] D を $\mathbf{C}$ の領域で原点を含むもの，$f:D\backslash\{0\}\longrightarrow\mathbf{C}$ は正則とする．このとき，次の (a), (b) は同値であることを示せ：

(a) 原点 0 は f の除去可能特異点である,

(b) 原点 0 は f' の除去可能特異点である．

(b) $\Rightarrow$ (a) のヒント： (b) を仮定すると十分小さい r に対し $M(r):=\sup_{0<|z|<r}|f'(z)|<\infty$. 従って D 内の点列 $z_n\to 0$, $|z_n|<r$ に対し $|f(z_n)-f(z_m)|\leq M(r)|z_n-z_m|$.

[93] $n\geq 0$, $0<R<\infty$ とする．正則関数 $f:\{z\in\mathbf{C};0<|z|<R\}\longrightarrow\mathbf{C}$ について次を示せ：

$$\text{原点 0 は } f \text{ の } n \text{ 位の極である} \iff \begin{cases}\text{十分小さい } r>0 \text{ に対し}\\ 0<\displaystyle\inf_{|z|<r}|z^nf(z)|\leq\sup_{|z|<r}|z^nf(z)|<\infty.\end{cases}$$

[94] $1\leq p<\infty$, $R>0$ とする．正則関数 $f:\{z\in\mathbf{C};0<|z|<R\}\longrightarrow\mathbf{C}$ に対し

$$\|f\|_p=\left(\int_{0<x^2+y^2<R^2}|f(x+\sqrt{-1}y)|^pdxdy\right)^{1/p}$$

とするとき以下を示せ：

(1) $\sup_{|z|<R/2} |z|^{2/p}|f(z)| \le C\|f\|_p$. 但し C は f に無関係な正数.

(2) $\|f\|_1 < \infty$ ならば，原点 0 は f の高々1位の極である.

(3) $\|f\|_2 < \infty$ ならば，原点 0 は f の除去可能特異点である.

(1) のヒント： $r < |z| < R/2$ とすると，

$$|f(z)|^p \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\sqrt{-1}\theta})|d\theta\right)^p \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\sqrt{-1}\theta})|^p d\theta,$$

$$\frac{1}{2}|z|^2|f(z)|^p \le \int_0^{|z|} rdr\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{\sqrt{-1}\theta})|^p d\theta \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_p^p.$$

(2) のヒント： (1) の結果と問題 [93] より原点 0 は f の高々2位の極であることが出る．ところが 2 位の極であると仮定すると再び問題 [93] より $\|f\|_1 = \infty$.

[95] D を $\mathbf{C}$ の領域で原点 0 を含むもの，また原点 0 は正則関数 $f : D\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ の 1 次の極とする． $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 2\pi$, $\Gamma(r) = \{r\exp(i\theta) \mid \theta_0 \le \theta \le \theta_1\}$ とするとき，$\lim_{r\searrow 0}\int_{\Gamma(r)} f(z)dz = (\theta_1-\theta_0)i\mathrm{Res}(f,0)$ を示せ，但し $\mathrm{Res}(f,0)$ は f の 0 における留数をあらわす.

[96] 留数定理の応用として次を示せ：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\exp(in\theta)\,d\theta = \begin{cases} r^{|n|} & \text{if } 0<r<1,\\ r^{-|n|} & \text{if } 1<r<\infty. \end{cases} \tag{4}$$

但し $n \in \mathbf{Z}$, $P_r(\theta) = |r^2-1|/|r\exp(i\theta)-1|^2$.
ヒント： $P_r(\theta) = P_{1/r}(-\theta)$ なので例えば $0<r<1$ のときのみ計算すれば，$1<r<\infty$ の場合も変数変換を通じて分る.

[97] $t \in \mathbf{R}, a \in (0,\infty)$ とする．留数定理を用いて次を示せ：

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{a^2+x^2}dx = \exp(-a|t|).$$

[98] $s \in (0,1)$ に対し次を示せ：

$$\int_0^1 t^{-s}(1-t)^{s-1}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

ヒント：最初の等号は変数変換：$t = 1/(1+x)$ で分る．次の等号は $\dfrac{z^s}{z(1+z)}$ に留数定理を用いて示せ.

[99] $(t_j)_{j=1}^n \in \mathbf{R}^n$ に対し $(x_{n,i}(t_1,\dots,t_n))_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n$ $(n \ge 2)$ を次の漸化式で定義する；

$$x_{n,i}(t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} t_1\cos t_2 & \text{if } n\ge 2,\ i=1,\\ t_1\sin t_2 & \text{if } n=i=2,\\ x_{n-1,i-1}(t_1\sin t_2, t_3,\dots,t_n) & \text{if } n\ge 3,\ 2\le i\le n. \end{cases}$$

行列 $J_n(t_1,\dots,t_n)=\left(\dfrac{\partial x_{n,i}(t_1,\dots,t_n)}{\partial t_j}\right)_{i,j=1}^n$ について次を示せ：

$$\det J_n(t_1,\dots,t_n)=t_1^{n-1}\prod_{j=2}^{n-1}\sin^{n-j}t_j.$$

ヒント：$\det J_2(t_1,t_2)=t_1$ は容易にわかる．更に $n\ge 3$ で次の等式が成立する：

$$J_n(t_1,\dots,t_n)=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & J_{n-1}(t_1\sin t_2,t_3,\dots,t_n)\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}J_2(t_1,t_2) & 0\\ 0 & (\delta_{ij})_{i,j=3}^n\end{array}\right).$$

この等式により $n\ge 2$ についての帰納法が使える.

余談：$(t_j)_{j=1}^n\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ とすると $(t_j)_{j=1}^n\mapsto(x_{n,i}(t_1,\dots,t_n))_{i=1}^n$ は極座標変換に他ならない.（その場合 $(t_1,\dots,t_n)=(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$ と書くことが多い.）

[100] $(x^1,\cdots,x^n)$, $(r,\theta^2,\cdots,\theta^n)$ は各々$\mathbf{R}^n$ の直交座標及び極座標,

$$g_{ij}=g_{ij}(\theta^2,\cdots,\theta^n)=r^{-2}\sum_{k=1}^n\frac{\partial x^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^j},\quad i,j=2,\cdots,n.$$

とするとき，以下を順次示せ：

(1) $g=(g_{ij})$ の逆行列 $g^{-1}=(g^{ij})$ は次で与えられる：$g^{ij}=r^2\sum_{k=1}^n\dfrac{\partial\theta^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial\theta^j}{\partial x^k}$.

(2) $\Delta_{S^{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i,j=2}^n\dfrac{\partial}{\partial\theta^i}\left(\sqrt{\det g}g^{ij}\dfrac{\partial}{\partial\theta^j}\right)$ とおくと $\Delta=\sum_{k=1}^n\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)^2$ は極座標を用いて次のように書ける：$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}$.

(3) $u\in C^2(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbf{C})$ が $k(\ge 0)$ 次同次かつ $\Delta u\equiv 0$ を満たすなら,

$$\Delta_{S^{n-1}}u(x)=-k(k+n-2)|x|^{k-2}u(x),\quad\forall x\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}.$$

[101] (1) 次の等式を示せ：$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\pi^{n/2}$.

(2) 単位球 $\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\le 1\}$ の表面積，体積が各々$\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ であることを (1) を利用して示せ.

[102] 定数 $c\in(0,\infty)$ 及び関数 $\rho:\mathbf{R}^d\to[0,\infty)$ $(d\ge 2)$ について以下の条件 (a)–(d) を考える：

(a) $f,g\in C^1(\mathbf{R}\to[0,\infty))$ が存在して任意の $v=(v_j)_{j=1}^n\in\mathbf{R}^n$ に対し $\rho(v)=\prod_{j=1}^d f(v_j^2)=g(|v|^2)$.

(b) $c\in(0,\infty)$ が存在し，任意の $j=1,\dots,d$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}v_j^2\rho(v)dv=c$.

(c) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}\rho(v)dv=1$.

(d) $\rho(v) = (2\pi c)^{-d/2}\exp(-|v|^2/2c)$.

このとき,「(a), (b), (c) $\Longleftrightarrow$ (d)」を示せ.

$\Rightarrow$ のヒント： 任意の $x \in [0,\infty)$ に対し次を順次示す：

(1) $f(0)^{d-1}f(x) = g(x)$,

(2) $f(0)'f(0)^{d-2}f(x) = g'(x)$,

(3) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$,

(4) $g'(x)/g(x) = f'(0)/f(0)$.

[103] $J_t : \mathbf{R}^2 \to [0,\infty)$ （$t > 0$）を次のように定義する：

$$J_t(a,b) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi t^3}}(2b-a)\exp\left(-\dfrac{(2b-a)^2}{2t}\right), & b \geq 0,\ a \leq b \text{ のとき}, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

以下を示せ：

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(b-a)J_t(a,b)dadb = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}} f(|x|)\exp\left(-|x|^2/2t\right)dx,$$
$$\int_{\mathbf{R}^2} f(2b-a)J_t(a,b)dadb = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^3}\int_{\mathbf{R}^3} f(|x|)\exp\left(-|x|^2/2t\right)dx.$$

但し $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ は有界かつ連続とする.

[104] a, b, c を正数とする．積分 $\displaystyle\int_A \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ を求めよ．ただし

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

[105] (1) $-\infty < a < b < \infty$ に対し，$g_{a,b}(t) = \dfrac{f(t-a)}{f(t-a)+f(b-t)}$ と置く，但し

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq 0, \\ \exp(-1/t), & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

次を示せ：f, $g_{a,b} \in C^\infty(\mathbf{R} \to [0,1])$,「$g_{a,b}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \leq a$」,「$g_{a,b}(x) = 1 \Longleftrightarrow b \leq x$」.

(2) $0 < r < R < \infty$ とする．次の性質をもつ $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \to [0,1])$ の具体例を挙げよ；「$|x| \leq r \Longleftrightarrow \varphi(x) = 1$」かつ「$R \leq |x| \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$」．但し，$x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n$ に対し，$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

[106] 関数 $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ を次で定義する：

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & \text{if } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{if } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

次を示せ：

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 1, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = -1.$$

[107] Gronwall の不等式：
$\alpha \in \mathbf{R}$, $u \in C([0,T] \to \mathbf{R})$, $v \in C([0,T] \to [0,\infty))$ が，

$$u(t) \le \alpha + \int_0^t v(t_1)u(t_1)dt_1, \quad \forall t \in [0,T] \tag{5}$$

を満たすとする．このとき，$\forall t \in [0,T]$ に対し不等式

$$u(t) \le \alpha \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right)$$

が成立する．これを，以下に述べる ヒント 1, 2 に従って 2 通りの方法で証明せよ：
ヒント 1：

$$V(t) = \int_0^t v(s)ds, \tag{6}$$

$$F(t) = e^{-V(t)} \int_0^t v(s)u(s)ds, \tag{7}$$

$$G(t) = \alpha\left(1 - e^{-V(t)}\right) \tag{8}$$

とおいて $F(t) \le G(t)$ を示せばよい．そこで $F - G$ を微分する．

ヒント 2：不等式 (5) の $u(t_1)$ に $u(t_1) \le \alpha + \int_0^{t_1} v(t_2)u(t_2)dt_2$ を適用すると

$$u(t) \le \alpha + \alpha \int_0^t v(t_1)dt_1 + \int_0^t v(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2)u(t_2)dt_2 \tag{9}$$

次に (9) の $u(t_2)$ に $u(t_2) \le \alpha + \int_0^{t_2} v(t_3)u(t_3)dt_3$ を適用して，

$$\begin{aligned} u(t) &\le \alpha + \alpha \int_0^t v(t_1)dt_1 + \alpha \int_0^t v(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} v(s)ds + \int_0^t v(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2)dt_2 \int_0^{t_2} v(t_3)u(t_3)dt_3 \\ &= \alpha + \alpha \int_0^t v(s)ds + \frac{\alpha}{2}\Big(\int_0^t v(s)ds\Big)^2 + \int_0^t v(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} v(t_2)dt_2 \int_0^{t_2} v(t_3)u(t_3)dt_3 \end{aligned} \tag{10}$$

更に (10) の $u(t_3)$ に ...

[108] $u \in C^1(\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R})$, $v, w \in C(\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R})$ に以下を仮定する：

$$\frac{d}{dt}u(t) \le -v(t)u(t) + w(t), \quad \text{for all } t > 0.$$

このとき，

$$u(t) \le \left(u(0) + \int_0^t w(s)e^{V(s)}ds\right)e^{-V(t)}, \quad \text{for all } t > 0.$$

を示せ，但し $V(t) = \int_0^t v(s)ds$.

[109] $J \subseteq \mathbf{R}$ を開区間, $\mathbf{R}^{d,d}$ を $d \times d$ 正方行列の全体, $A \in C^r(J \times J \to \mathbf{R}^{d,d})$ とする．以下を示せ：

(1) $U \in C^{r+1}(J \to \mathbf{R}^{d,d})$ であって任意の $s, t \in J$ に対し $U(s,t) = I + \displaystyle\int_t^s A(\sigma)U(\sigma,t)d\sigma$ を満たすものが唯一存在する．

(2) 任意の $a \in J$, $b \in \mathbf{R}^d$, 及び $g \in C^r(J \to \mathbf{R}^d)$ に対し初期値問題；

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + g(t), \quad t \in J, \\ u(a) = b \end{cases}$$

の解 u は唯一で，$u(t) = U(t,a)b + \displaystyle\int_a^t U(t,s)g(s)ds$ で与えられる．

(1) のヒント： $U_0(s,t) \equiv I$, $U_p(s,t) = I + \int_t^s A(\sigma)U_{p-1}(\sigma,t)d\sigma$ $(p = 1,2,\ldots)$ とするとき $\{U_p\}_{p\geq 0}$ が $I \times I$ 上一様収束することを示し，その極限を U とせよ．

[110] 問題 [109] の $U(s,t)$ について以下を示せ：

(1) $\dfrac{\partial}{\partial s}U(s,t) = A(s)U(s,t)$,

(2) $\dfrac{\partial}{\partial t}U(s,t) = -U(s,t)A(t)$,

(3) $U(s,s')U(s',t) = U(s,t)$,

(4) $U(s,s')U(s',s) = U(s,s) = I$,

(5) $\det U(s,t) = \exp\Bigl(\displaystyle\int_t^s \mathrm{tr}A(\sigma)\,d\sigma\Bigr)$,

(6) $\dfrac{A(s)+A(s)^*}{2}$ の最大，最小固有値を各々$m(s)$, $M(s)$ とすると，任意の $x \in \mathbf{R}^d$ に対し

$$\exp\left(\int_t^s m(\sigma)d\sigma\right)|x| \leq |U(s,t)x| \leq \exp\left(\int_t^s M(\sigma)d\sigma\right)|x|.$$

(7) $A(t)$ の成分が全て非負値関数ならば $U(s,t)$ の成分もそうである．

[111] 問題 [109] の $U(s,t)$ について以下を示せ：

(1) $A(t)$ の成分が全て非負値関数ならば $U(s,t)$ の成分もそうである．

(2) 任意の $s, t \in J$ に対し $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ ならば $U(s,t) = \exp\left(\displaystyle\int_t^s A(\sigma)d\sigma\right)$.

[112] $J \subset \mathbf{R}$ を開区間, $\alpha_j \in \mathbf{R}$ $a_j \in C(J \to \mathbf{R})$ $(j = 0,1,\ldots,n-1)$ とする．以下を示せ：

(1) $u \in C^n(J \to \mathbf{R})$ であって次の初期値問題の解となるものが唯一存在する：

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)u^{(j)}(t) \quad t \in J, \\ u^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

(2) $\alpha_j \geq 0$, $a_j \in C(J \to [0,\infty))$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ ならば $u \in C^n(J \to [0,\infty))$.

(1) のヒント： 問題 [109]
(2) のヒント： 問題 [111]-(1)

[113] $[0,\infty)$ 上の有界連続実数値関数 f で

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-|x-y|} f(y)dy, \quad x \geq 0$$

を満たすものを全て求めよ.

[114] $-\infty < a < b < +\infty$ とし $u \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ は $\inf uu'' \geq 0$ を満たすとする．以下を示せ：

(1) $u(a) \leq 0 < u(b)$ 或は $u'(a) \leq 0 < u'(b)$ ならば u は $[b,\infty)$ 上非減少かつ $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$.

(2) $u(a) \geq 0 > u(b)$ 或は $u'(a) \geq 0 > u'(b)$ ならば u は $[b,\infty)$ 上非増加かつ $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.

[115] $I \subset \mathbf{R}$ は長さ $|I| < \infty$ の閉区間とする．$f \in C(I \to \mathbf{C})$ に対して,

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left\{ \int_I |f|^p \right\}^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_I |f|, & \text{if } p = \infty, \end{cases}$$

とおく．以下を示せ：

(1) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$,

(2) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, 従って $(C(I \to \mathbf{C}), \|\cdot\|_p)$ はノルム空間となる.

(3) $p \leq q \;\Rightarrow\; \|f\|_p \leq |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$.

[116] 問題 [115] で $\forall f \in C(I \to \mathbf{R})$ に対し以下を示せ：

(1) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$,

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \log \int_I e^{\lambda f(t)} dt = \max_I f$.

[117] $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ とする．$f : \mathbf{Z} \to K$, $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left\{ \sum_{x\in\mathbf{Z}} |f(x)|^p \right\}^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup_{x\in\mathbf{Z}} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases}$$

とおく（$\|f\|_p = \infty$ ということもある）．このとき以下を示せ：

(1) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$,

(2) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, 従って，$l^p(\mathbf{Z} \to K) \overset{\text{def}}{=} \{f : \mathbf{Z} \to K; \|f\|_p < \infty\}$ は $\|\cdot\|_p$ を norm としてノルム空間となる．

(3) $p \le q \;\Rightarrow\; \|f\|_p \ge \|f\|_q$，従って $l^p(\mathbf{Z} \to K) \subset l^q(\mathbf{Z} \to K)$.

[118] 問題 [117] で $\inf_{1 \le p < \infty} \|f\|_p < \infty$ を満たす $f : \mathbf{Z} \to K$ に対し $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ を示せ．

[119] (1) 問題 [115] で，$1 \le p < q \le \infty$ とすると，$\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ は $C(I \to \mathbf{C})$ 上で同値なノルムか？

(2) 問題 [117] で，$1 \le p < q \le \infty$ とすると，$\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ は $l^p(\mathbf{Z} \to K)$ 上で同値なノルムか？

[120] $1 \le p \le \infty$, $f \in l^p(\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$, $g \in l^1(\mathbf{Z} \to \mathbf{C})$ とする．$f * g(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m \in \mathbf{Z}} f(n-m)g(m)$ は全ての $n \in \mathbf{Z}$ に対して絶対収束して不等式 $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ を満たすことを示せ．

[121] ノルム空間 $l^p(\mathbf{Z} \to K)$ $(1 \le p \le \infty)$ ([117]) は Banach 空間 (完備なノルム空間) である事を示せ．

[122] $I \subset \mathbf{R}$, $\alpha \in (0, 1]$ とする．$f : I \to \mathbf{R}$ が

$$\omega_\alpha(f; I) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ x, y \in I,\ x \ne y\right\} < \infty$$

を満たすとき，f は α-次 Hölder 連続といい，$f \in$ $\text{Höl}^\alpha(I \to \mathbf{R})$ と書く．

(1) $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \text{Höl}^\alpha(I \to \mathbf{R})$ の元は I 上一様連続か？

(2) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ が連続なら $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \text{Höl}^\alpha([0, 1] \to \mathbf{R})$ の元か？

(3) $0 \in I$, $\alpha \in (0, 1]$ とすると， $\text{Höl}^\alpha(I \to \mathbf{R})$ は ノルム：$\|f\| = |f(0)| + \omega_\alpha(f; I)$ で Banach 空間になることを示せ．

[123] 関数方程式：$\forall x, \forall y \in \mathbf{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすが $\mathbf{R}$-linear でない $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が存在することを示せ．

ヒント：体 K 上の vector space には base が存在する，例えば $K = \mathbf{Q}$.

[124] 任意の vector space 上に内積が（従ってノルムが）存在する．

[125] V は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持った vector space とする．写像 $f : V \to V$ について次は同値であることを示せ：

(a) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$.

(b) f は線型かつ $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $\forall x, y \in V$. 但し $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

[126] $(E, |\cdot|_E)$ をノルム空間，V を E の有限次元部分空間とする．次を示せ：

(1) 任意の $u \in E$ に対し V の中で u からの距離が最小となる点が存在する，すなわち $v_0 \in V$ が存在して，$|u - v_0|_E = \inf\{|u - v|_E;\ v \in V\}$.

(2) (1) において v_0 は一意的か？

(3) V が無限次元なら (1) のような v_0 は存在しないこともある．具体例を挙げよ．

[127] $K=\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$. $(H, |\cdot|_H)$ を K 上の Hilbert 空間とする．次を示せ：

(1) $M\subset H$ が閉凸集合なら $\forall x\in H$ に対し，$|x-m_0|_H=\inf\{|x-m|_H\,;\,m\in M\}$ をみたす $m_0\in M$ が唯一存在する．

(2) $M\subset H$ が閉部分空間なら，$H=M\oplus N$ (直交直和) となる閉部分空間 N が唯一存在する．

(3) **Riesz の表現定理** $f\in\mathscr{L}(H\to K)$ に対し，$f(x)=\langle x, h_f\rangle_H,\ \forall x\in H$ をみたす $h_f\in H$ が唯一存在する．ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ は内積を表わす．

(4) (3) において $h_{\alpha f+\beta g}=\overline{\alpha}h_f+\overline{\beta}h_g,\ \alpha,\beta\in K,\ f,g\in\mathscr{L}(H\to K)$.

[128] $l^p(\mathbf{Z}\to\mathbf{R})$ $(1\le p<\infty)$ ([117]) は可分である．

[129] 以下を示せ：

(1) 距離空間 (Y,d_Y) のある非可算部分集合 Y_0 が条件：

$$\inf\{d_Y(y,y');\ y,y'\in Y_0,\ y\neq y'\}>0$$

を満たすなら，(Y,d_Y) は可分ではない．

(2) $l^\infty(\mathbf{Z}\to\mathbf{R})$ は可分ではない．

[130] Banach space $\text{Höl}^\alpha([0,1]\to\mathbf{R})$ ([122]) は可分ではない事を示せ．

[131] 位相空間 X 上の関数 $f:X\to(-\infty,\infty]$ について $\forall a\in\mathbf{R}$ に対し $\{x\in X; f(x)\le a\}$ が閉集合ならば，f を下半連続 (lower semi-continuous) であるという．また $f:X\to[-\infty,\infty)$ について $\forall a\in\mathbf{R}$ に対して $\{x\in X; f(x)\ge a\}$ が閉集合ならば f を上半連続 (upper semi-continuous) であるという．以下を示せ：

(1) $f\in C(X\to\mathbf{R})\iff f$ が下半連続 かつ 上半連続．

(2) 下半連続関数の族：$\{f_\lambda : X\to(-\infty,\infty]\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ は下半連続である．

(3) X が Hausdorff 位相空間, $f:X\to(-\infty,\infty]$ とする．$\forall a\in\mathbf{R}$ に対し集合 $\{x\in X; f(x)\le a\}$ が compact なら f は最小値をもつ．特に compact Hausdorff 位相空間の上の 下半連続関数 は最小値を持つ．

(3) のヒント： $a=\inf_{x\in X}f(x)$ (勿論 $\alpha=-\infty$ も含む)，$a_1>a_2>\ldots>a_n\searrow a$ とする．このとき $\{x\in X; f(x)\le a_n\}$ は空でない compact set であって $\{x\in X; f(x)\le a\}=\bigcap_{n\ge1}\{x\in X; f(x)\le a_n\}$ なお X に Hausdorff と仮定したのは compact subset が closed subset であることを保証するため．

[132] X を距離空間 $f:X\to(-\infty,\infty]$ とするとき，次を示せ：

$$「f \text{ は下半連続」}\iff「x_n\to x \text{ ならば常に } \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)\ge f(x)」$$

また上半連続関数 に対しても対応する同値性を述べよ．

[133] X を距離空間 $f:X\to(-\infty,\infty]$, $\underline{f}(x)=\sup_{r>0}\inf\{f(y);\ d(x,y)<r\}$ とする．このとき，以下を示せ：

(1) $\underline{f}$ は下半連続.

(2) $g : X \to (-\infty, \infty]$ は下半連続かつ $g \le f$ なら $g \le \underline{f}$.

(3) 「f は下半連続」 $\iff$「$\underline{f} = f$.」

[134] X が距離空間，$f : X \to (-\infty, \infty]$ を下半連続 とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_{\rm unif}(X \to \mathbf{R})$ であって $f_n(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in X$ となるものが存在することを示せ.

[135] $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$ を距離空間とする．X から Y への写像の族 $\mathscr{E}$ が $x \in X$ において

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (d_X(x, y) < \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathscr{E}} d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

を満たす時，$\mathscr{E}$ は $x \in X$ において同程度連続 (equi-continuous) であるという．$\mathscr{E}$ が全ての点で同程度連続な時，$\mathscr{E}$ は同程度連続という．連続関数列 $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$ が $f : X \to Y$ に各点収束すると仮定する．以下を示せ：

(1) $\{f_n\}_{n \ge 1}$ が点 $x \in X$ で同程度連続なら f は $x \in X$ で連続.

(2) $\{f_n\}_{n \ge 1}$ が同程度連続 $\iff$ $f_n \to f$ は局所一様収束 .

(1) のヒント： $x, y \in X$ に対し $d_Y(f(x), f(y)) \le \sup_{n \ge 1} d_Y(f_n(x), f_n(y))$.
(2) $\Rightarrow$ のヒント： $x, y \in X$, $n \ge 1$ に対し

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \le d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), f_n(y)) + d_Y(f_n(y), f_n(x)).$$

$n \to \infty$ とすれば $\overline{\lim}_{n \to \infty} d_Y(f(x), f_n(x)) \le d_Y(f(x), f(y)) + \overline{\lim}_{n \to \infty} d_Y(f_n(y), f_n(x))$.
(2) $\Leftarrow$ のヒント： x を任意，$\lim_{m \to \infty} x_m = x$ とする．このとき，$K = \{x\} \cup \{x_m\}_{m \ge 1}$ は compact．また三角不等式より $d_Y(f_n(x), f_n(x_m)) \le 2 \sup_{y \in K} d_Y(f_n(y), f(y)) + d_Y(f(x), f(x_m))$.

[136] (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X \to Y)$ を同程度連続関数列とする．$A \subseteq X$ に対して次を示せ：

(1) $\forall x \in A$ に対して $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy-列ならば $\forall x \in \overline{A}$ に対してもそうである.

(2) (Y, d_Y) が完備なとき，$\forall x \in A$ に対して $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列を含むなら $\forall x \in \overline{A}$ に対してもそうである.

[137] X, Y を距離空間，$f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$ を連続関数列とし，条件

(a) $\{f_n\}_{n \ge 1}$ は同程度連続.

(b) $\{f_n\}_{n \ge 1}$ は稠密な部分集合 X_0 上各点収束.

(c1) $\forall x \in X$ に対して集合 $\{f_n(x)\}_{n \ge 1}$ の閉包は Y の距離について完備.

(c2) $\forall x \in X$ に対して集合 $\{f_n(x)\}_{n \ge 1} \subset Y$ の閉包は compact.

を考える．以下を示せ：

(1) 次の 3 つの命題は同値である：「$\{f_n\}_{n \ge 1}$ は或る $f \in C(X \to Y)$ に局所一様収束する」,「条件 (a), (b), (c1) が成立」,「条件 (a), (b), (c2) が成立」.

(2) X を可分（i.e., 稠密可算集合 X_0 が存在）とする．条件 (a), (c2) が満たされるなら $\{f_n\}_{n \ge 1}$ は或る $f \in C(X \to Y)$ に局所一様収束する部分列を含む.

(1) のヒント： 条件 (a), (b), (c1) を仮定すると [136] より，$\{f_n\}_{n\ge1}$ は各点収束する．そこで [135] の結果が使える．
(2) のヒント：条件 (c2) を仮定すると $\{f_n\}_{n\ge1}$ の部分列で X_0 上各点収束するものの存在する（対角線論法）．その部分列に対して (1) の結果を適用せよ．

[138] X は局所 compact な距離空間で可算開基底をもつとする．更に Y は距離空間, $\mathscr{E} \subseteq C(X \to Y)$ とするとき，以下を示せ；

(1) $\mathscr{E}$ が問題 [54] の距離 D で compact なら $\mathscr{E}$ は同程度連続かつ集合

$$\bigcup_{f\in\mathscr{E}}\{f(x)\ ;\ x \in K\} \tag{11}$$

は Y の compact 部分集合である．
ヒント：(11) で定義される集合の compact 性は $(x, f) \mapsto f(x)$ が $X \times C(X \to Y)$ から Y への連続写像であることから出る．

(2) **Ascoli-Arzela の定理：** 次の 2 条件は同値である．
 (a) E は距離 D について相対 compact (i.e., 閉包が compact).
 (b) E は同程度連続かつ (11) で定義される集合は相対 compact.

ヒント： (a) $\Rightarrow$ (b) は (1) で $\overline{E}$ を考えればよい．
(b) $\Rightarrow$ (a) では 問題 [137] の結果が使える．

[139] $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$, $Z = (Z, d_Z)$ を距離空間とする．

(1) 次の例を作れ：$f : X \times Y \to Z$ が「$\forall x \in X$ に対し $f(x, \cdot) \in C(Y \to Z)$」かつ「$\forall y \in Y$ に対し $f(\cdot, y) \in C(X \to Z)$」であっても $f \in C(X \times Y \to Z)$ とは限らない．

(2) $f : X \times Y \to Z$ について次の 2 条件は同値であることを示せ：
 (a) $f \in C(X \times Y \to Z)$
 (b) $\forall x \in X$ に対し $f(x, \cdot) \in C(Y \to Z)$ かつ Y の任意の compact set K に対し $\{f(\,\cdot\,, y)\}_{y\in K}$ は同程度連続.

[140] $f : \mathbf{R} \to (-\infty, \infty]$ が次の性質を持つとき凸関数 (convex function) という：

$$\lambda, \mu \ge 0, \quad \lambda + \mu = 1 \ \Rightarrow\ f(\lambda x + \mu y) \le \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \forall x, \forall y \in \mathbf{R}.$$

$f : \mathbf{R} \to (-\infty, \infty]$ を 凸-関数，$I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbf{R};\ f(x) < \infty\}$ とし，I が 2 点以上を含むことを仮定する．以下を示せ：

(1) $-\infty \le a < b \le \infty$ が存在して I は次の何れかの形になる：(a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$.

(2) $a < x_1 < x_2 \le x_3 < x_4 < b$ に対し，

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_4) - f(x_1)}{x_4 - x_1} \le \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

(3) $x \in (a, b)$ に対し，$D^{\pm} f(x) = \displaystyle\lim_{y\to x\pm0} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ が存在して，

$$a < x < y < b \ \Rightarrow\ D^- f(x) \le D^+ f(x) \le D^- f(y) \le D^+ f(y).$$

(4) $a < x_1 \le x_2 < x_3 \le x_4 < b$ ならば，

$$-\infty < D^+ f(x_1) \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \le D^- f(x_4) < \infty.$$

(5) 任意の閉区間 $J \subset (a,b)$ に対して定数 $L = L_J > 0$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|, \quad x, y \in J.$$

従って，$f : I \to \mathbf{R}$ は両端点以外では連続.

(6) $x \in I$ が I の端点（従って a or b）と仮定する．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ が x に収束するなら，$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x)$.

(7) $f : I \to \mathbf{R}$ が不連続となる例を挙げよ.

[141] $I = (a,b)$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $\varphi : I \to \mathbf{R}$ を convex function とする．次を示せ：

(1) $c \in I$, $D^- \varphi(c) \le \alpha \le D^+ \varphi(c)$ （cf. [140]）なら $\varphi(c) + \alpha(x - c) \le \varphi(x), \quad \forall x \in I$.

(2) $x_1, \dots, x_n \in I,\ p_1 + \cdots + p_n = 1,\ p_j \ge 0 \Rightarrow \varphi\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j p_j\right) \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) p_j$.

(3) $a_j \ge 0,\ p_j \ge 0,\ p_1 + \cdots + p_n = 1 \Rightarrow a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \le a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$.

(4) $J \subset \mathbf{R}$ は長さ $|J| < \infty$ の閉区間, $f \in C(J \to I)$ とするとき, $\varphi\left(|J|^{-1} \displaystyle\int_J f\right) \le |J|^{-1} \displaystyle\int_J \varphi(f)$.

(2) のヒント： (1) で $c = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j$, $x = x_j$ と置いた式を用いると早い.
(3) のヒント；$a_j > 0$ の場合を示せば十分．そこで，両辺の log を考えよ.
(4) ヒント： (2) のヒントを参考にせよ.

[142] $I = (a,b)$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $\varphi : I \to \mathbf{R}$ を convex function とする．このとき，実数列 a_n, b_n, $(n \ge 1)$ であって $\forall x \in I$ に対し $\varphi(x) = \sup_{n \ge 1}\{a_n x + b_n\}$ を満たすものが存在することを示せ.
ヒント: $y \in \mathbf{Q} \cap I$ に対し $a_y = D^+\varphi(y)$, $b_y = \varphi(y) - y D^+ \varphi(y)$, $\psi(x) = \sup_{y \in \mathbf{Q} \cap I}\{a_y x + b_y\}$ とおく．$\forall x \in I$ に対し $\varphi(x) \ge a_y x + b_y$ かつ $\varphi(y) = a_y y + b_y$. 従って $x \in \mathbf{Q} \cap I$ ならば $\varphi(x) = \psi(x)$ である．これを用いて $\forall x \in I$ に対し $\varphi(x) = \psi(x)$ を示せ.

[143] $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ について以下を示せ：

(1) φ が convex なら $\varphi(x+y) + \varphi(0) \ge \varphi(x) + \varphi(y), \ \forall x, \forall y \in [0, \infty)$.

(2) φ が concave なら $\varphi(x+y) + \varphi(0) \le \varphi(x) + \varphi(y), \ \forall x, \forall y \in [0, \infty)$.

(1) のヒント：$x + y > 0$ と仮定してよい．この時，$\varphi(x) \le \frac{y}{x+y}\varphi(0) + \frac{x}{x+y}\varphi(x+y)$. また，同様の式が x, y を入れ替えても成立.

[144] 下半連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ について次を示せ：

$$f \text{ が convex} \iff f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, \forall y \in \mathbf{R}.$$

[145] $f:\mathbf{R}\to(-\infty,\infty]$, $(f\not\equiv\infty)$ に対し，$f^*(x)=\sup\{tx-f(t);\ t\in\mathbf{R}\}$ とおく．次を示せ：

(1) f^* は下半連続かつ convex .

(2) $(f^*)^*\le f$.

(3) f が下半連続なら,「f が convex $\Longleftrightarrow (f^*)^*=f$」

[146] $I=(a,b)$ $(-\infty\le a<b\le\infty)$, $f,\ f_n:I\to\mathbf{R}$ を convex とする．今,

(a) $f_n(t)\to f(t)$ $(n\to\infty)$, $\forall t\in I$,

(b) $f,\ f_n$ は $t_0\in I$ において可微分,

とするとき $\lim_{n\to\infty}f_n'(t_0)=f'(t_0)$ を示せ.

[147] 問題 [137] の 凸-関数列への応用
$I=(a,b)$ $(-\infty\le a<b\le\infty)$ とする．以下を示せ：

(1) 凸-関数列 $f_n:I\to\mathbf{R}$ $(n=1,2,\ldots)$ が I の或る稠密部分集合上で各点収束しているなら，I に含まれる任意の閉区間上同程度連続である.

(2) (1) の $f_n:I\to\mathbf{R}$ $(n=1,2,\ldots)$ は I 上，局所一様収束する.

(3) 凸-関数列 $f_n:I\to\mathbf{R}$ $(n=1,2,\ldots)$ が I 上一様有界（i.e., $\sup_n\sup_{x\in I}|f_n(x)|<\infty$）なら $(f_n)_{n=1}^\infty$ は I 上で局所一様収束する部分列を含む.

[148] 複素平面上の領域 D で定義された関数族 $\mathfrak{F}=\{f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ が D において正規族 (normal family) であるとは，$\mathfrak{F}$ の元からなる任意の関数列 $\{f_n\}$ が「D の任意の compact 部分集合 K 上で一様収束する」部分列を持つことと定義する.

D を $\mathbf{C}$ 内の領域，$\mathfrak{F}\subset\mathrm{Hol}(D):=$ D 上の正則関数全体，更に任意の compact set $K\subset D$ に対し

$$\sup\{|f(z)|;\ f\in\mathfrak{F},\ z\in K\}<\infty \tag{12}$$

であるとき $\mathfrak{F}$ は正規族であることを示せ．(Montel の定理)

[149] **Vitali の定理**：D を $\mathbf{C}$ 内の領域，$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathrm{Hol}(D)(:=D$ 上の正則関数全体) とし，更に次の 2 つを仮定する：

(a) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列は局所一様収束する部分列を含む.

(b) 集合 $L=\{z\in D\ ;\ \lim_{n\to\infty}f_n(z)$ が存在 $\}$ が D 内に集積点をもつ.

このとき，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は或る $f\in\mathrm{Hol}(D)$ に局所一様収束することを示せ.
ヒント： 任意の局所一様収束部分列の極限が同じ関数であることを示せばよい．そのために一致の定理を用いよ.

[150] D を $\mathbf{C}$ 内の領域，$f_n\in\mathrm{Hol}(D):=$ D 上の正則関数全体 $(n=1,2,\ldots)$, $f:D\to\mathbf{C}$ とする．$f_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f$ (局所一様収束) ならば，$f\in\mathrm{Hol}(D)$ かつ $\forall k=0,1,\ldots$ に対し，$\dfrac{d^kf_n}{dz^k}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{d^kf}{dz^k}$ (局所一様収束) となることを示せ.

[151] (1) 級数 $\sum_{n=0}^\infty n!z^n$ の収束半径を求めよ.

(2) 多項式関数の全体は $\mathbf{C}$ 内のいかなる領域においても正規族にはならないことを示せ.

[152] (1) g を整関数とし $f_n(z) = g(2^n z)$ $(n \geq 0)$ とおく. $\{f_n\}$ が $1 < |z| < 2$ で広義一様収束する部分列を持つならば g は定数であることを示せ.

(2) g は $0 < |z| < 1$ で正則, $f_n(z) = g(2^{-n} z)$ $(n \geq 0)$ とおく. $\{f_n\}$ が $1 < |z| < 2$ で広義一様収束する部分列を持つならば $\lim_{z \to 0} g(z)$ が存在することを示せ.

[153] X を集合, 2^X をその部分集合全体, $\mathscr{A} \subset 2^X$, 更に $\mathscr{A}$ を含む最小の σ-field を $\sigma[\mathscr{A}]$ とする. $\mathscr{A}$ が有限集合なら $\sigma[\mathscr{A}]$ もそうであることを示せ.
ヒント：X が部分集合 $B_1, \ldots, B_m$ の disjoint union なら, $\sigma[\{B_j\}_{j=1}^m]$ は高々 2^m 個の集合しか含まない. そこで, そのような $B_1, \ldots, B_m$ を適当にとって $\sigma[\mathscr{A}] = \sigma[\{B_j\}_{j=1}^m]$ とできることを示す.

[154] 次の命題に反例を与えよ:「$\mathscr{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は集合 X の σ-field で単調増大 $(\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n$ は σ-field である.」

[155] 可算開基底をもつ局所 compact 位相空間の Borel σ-field について.
X は局所 compact 位相空間で可算開基底をもつとする. 以下を示せ：

(1) Compact closure をもつ開集合列 $(U_n)_{n \geq 1}$ で次を満たすものが存在する：$\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots.)$, $\bigcup_{n=1}^\infty U_n = X$.

(2) $\mathscr{O} = \{X$ の開集合全体$\}$, $\mathscr{F} = \{X$ の閉集合全体$\}$, $\mathscr{K} = \{X$ の compact 集合全体$\}$ とするとき, $\sigma[\mathscr{O}] = \sigma[\mathscr{F}] \subseteq \sigma[\mathscr{K}]$.

(3) 特に X が Hausdorff (従って $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{F}$) なら $\sigma[\mathscr{O}] = \sigma[\mathscr{F}] = \sigma[\mathscr{K}]$.

[156] $\mathscr{O} = \{\mathbf{R}^n$ の開集合全体$\}$, $\mathscr{F} = \{\mathbf{R}^n$ の閉集合全体$\}$, $\mathscr{K} = \{\mathbf{R}^n$ の compact 集合全体$\}$, 更に $\mathscr{I}, \mathscr{E}$ を

$\mathscr{I}$: $\mathbf{R}^n$ の区間全体 (ここでは I が区間 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I は $\prod_{j=1}^n (a_j, b_j]$ の形,
ただし $b_j = \infty$ なら $(a_j, b_j] = (a_j, \infty)$.)
$\mathscr{E}$: 有限個の区間の直和として表せる集合全体

とする. 次を示せ：$\sigma[\mathscr{I}] = \sigma[\mathscr{E}] = \sigma[\mathscr{O}] = \sigma[\mathscr{F}] = \sigma[\mathscr{K}]$

[157] X を集合, 2^X をその部分集合全体とする. $\mathscr{D} \subseteq 2^X$ であって次の (a)–(c) を満たすものを Dynkin 族 (Dynkin class) という：

(a) $X \in \mathscr{D}$.

(b) $A, B \in \mathscr{D}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \cap A^c \in \mathscr{D}$.

(c) $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{D}$.

Dynkin 族 $\mathscr{D} \subset 2^X$ が intersection で閉じている (i.e., $A, B \in \mathscr{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{D}$) ならば $\mathscr{D}$ は σ-field であることを示せ.

[158] **Dynkin 族定理**：
X を集合, 2^X をその部分集合全体, $\mathscr{S} \subset 2^X$ とする. 以下を示せ：

(1) 集合族：$\sigma[\mathscr{S}] = \bigcap \mathscr{B}$ ($\cap$ は X の σ-field $\mathscr{B}$ で $\mathscr{S}$ を含むもの全ての intersection) は $\mathscr{S}$ を含む最小の σ-field である.

(2) 集合族：$\delta[\mathscr{S}] = \bigcap \mathscr{D}$ ($\cap$ は Dyikin class $\mathscr{D}$ で $\mathscr{S}$ を含むもの全ての intersection) は $\mathscr{S}$ を含む最小の Dynkin class である．

(3) $\mathscr{S}$ が intersection で閉じている (i.e., $A,\, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{S}$) ならば $\delta[\mathscr{S}]$ もそうである（従って [157] により $\delta[\mathscr{S}]$ は σ-field である）．

(4) (**Dynkin class theorem**) $\mathscr{S}$ が intersection で閉じているならば $\delta[\mathscr{S}] = \sigma[\mathscr{S}]$.

[159] Dynkin class theorem ([158]-(4)) の応用．
X を集合，2^X をその部分集合全体，$\mathscr{S} \subseteq 2^X$ とする．可測空間 $(X, \sigma[\mathscr{S}])$ 上の 2 つの測度 μ, ν について，次が言えるか否かを問題とする．

$$\forall S \in \mathscr{S},\ \mu(S) = \nu(S) \Rightarrow \mu = \nu \tag{$*$}$$

(1) 次の条件を仮定して $(*)$ を示せ．

(a) $S_1, S_2 \in \mathscr{S} \Rightarrow S_1 \cap S_1 \in \mathscr{S}$.

(b) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$.

ヒント： 集合族 $\{E \in \sigma[\mathscr{S}];\, \mu(E) = \nu(E)\}$ は Dynkin class.

(2) 条件 (a) 及び次の条件 (c) を仮定して $(*)$ を示せ．

(c) $\mathscr{S}$ の 増大列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ であって，$\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n = 1, 2, \ldots,)$ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ なるものが存在．

[160] 集合 A, B の対称差 $A \triangle B$ を $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ と定義する．以下を示せ：

(1) $\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \triangle \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcup_{j\in J} (A_j \triangle B_j)$, 但し添字集合 J は任意である．

(2) $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を有限測度空間，$\mathscr{A}$ を有限加法族で $\mathscr{B}$ に含まれるものとする．このとき $B \in \sigma[\mathscr{A}]$ について，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } \mu(A \triangle B) < \varepsilon \text{ なる } A \in \mathscr{A} \text{ が存在する} \tag{13}$$

ヒント：$\widetilde{\mathscr{A}} = \{B \in \mathscr{B}\ ;\ (13)\text{ が成立}\}$ とおいて $\widetilde{\mathscr{A}}$ が σ-field であることを示す．そこから $\sigma[\mathscr{A}] \subset \widetilde{\mathscr{A}}$ を結論せよ．

[161] μ, ν を $\mathbf{R}^n$ 上の Borel 測度とし，$\mathscr{I}$, $\mathscr{E}$ は問題 [156] の通りとする．以下を示せ：

(1) 「任意の有界な区間 I に対し $\mu(I) = \nu(I) < \infty$」を仮定すると $\mu = \nu$.

(2) Borel-可測集合 B が $\mu(B) < \infty$ を満たすなら任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$ なる $A \in \mathscr{E}$ が存在する．

ヒント： 問題 [159], [160] を使え．

[162]

X : 可分な距離空間 i.e., countable dense subset $S \subseteq X$ が存在
μ : X 上の Borel measure
U : X の開集合で $\mu(U) < \infty$ なるもの

とするとき以下を示せ：

(1) 任意の $n=1,2,\ldots$ に対し，$U = \displaystyle\bigcup_{(x,m)\in I(n)} B(x;1/m)$. 但し

$$\begin{aligned}&B(x;r) = \{y \in X;\ \ |x,y|_X \le r\}\\ &I(n) = \{(x,m);\ \ x \in S,\ m \in \mathbf{N}^*\ m \ge n,\ U \supset B(x;1/m)\}.\end{aligned}$$

(2) $I(n)$ の有限部分集合の単調増大列 $I(n,k)$ $(k=1,2,\ldots)$ を $I(n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I(n,k)$ なるように選ぶとき，

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\ \forall n \ge 1,\ \exists l_n \ge 1,\\ &\mu\left(\bigcup_{(x,m)\in I(n,l_n)} B(x;1/m)\right) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2^n}\end{aligned}$$

(3) (2) で $K_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{(x,n)\in I(n,l_n)} B(x;1/m)$ とおくと，K_ε は全有界な閉集合で，$K_\varepsilon \subset U$, $\mu(U\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす.

注意：X が完備なら K_ε は compact.

[163] X を位相空間，μ を X 上の Borel measure とする．Borel set $E \subset X$ についての性質 (R_0), (R_1) を次で定める：

(R_0)
$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(G);\ G \text{ は } E \text{ を含む開集合}\}\\ &= \sup\{\mu(F);\ \ F \text{ は } E \text{ に含まれる閉集合}\}\end{aligned}$$

(R_1)
$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(G);\ G \text{ は } E \text{ を含む開集合}\}\\ &= \sup\{\mu(K);\ K \text{ は } E \text{ に含まれる compact set}\}\end{aligned}$$

このとき次に答えよ：

(1) μ を finite Borel measure とするとき，集合族

$$\mathscr{R} = \{E; X \text{ の Borel subset で性質 } (R_0) \text{ をみたす}\}$$

は σ-algebra であることを示せ.

(2) X を可分距離空間，μ を X 上の finite Borel measure とするとき，任意の Borel set E は性質 (R_0) をもつ．更に，X が完備なら，任意の Borel set E は性質 (R_1) をもつ.

[164] $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ は Lebesgue-可測かつ任意の有界可測集合の上で可積分とする．次を示せ：

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\varphi = 0,\ \ \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n \to [0,\infty)) \ \ \Rightarrow\ \ f = 0 \text{ a.e.}$$

ヒント： 次の (i), (ii) を利用して，任意の有界可測集合 E に対して $\int_E f = 0$ を示せ．(i) $\forall n = 1,2,\ldots$ に対して 閉集合 $K_n \subset E$, 有界な開集合 $G_n \supset E$ で，$G_n\backslash K_n$ の Lebesgue measure $< 1/n$ となるものが存在する (証明不用)．(ii) $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R} \to [0,1])$ で K_n 上で $\equiv 1$, G_n 上では $\equiv 0$ なるものが存在.

[165] 次を示せ：$x>0$ なら

$$\int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = x^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2x^2}-t\right) \le x^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

更に

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^\infty \exp(-t^2/2)dt}{x^{-1}\exp(-x^2/2)} = 1.$$

[166] $(X,\mathscr{B},m)$ を測度空間，$0<p<\infty$ とする．可測関数 f, f_n $(n=1,2,\ldots)$ が

$$f_n\to f,\ m\text{-a.e.}\quad 及び\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_X |f_n|^p dm \le \int_X |f|^p dm < \infty$$

をみたすならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p dm = 0$ が成り立つことを示せ．
ヒント： 関数 $g_n(x) = 2^p(|f|^p+|f_n|^p) - |f-f_n|^p$ が非負値であることに注意すると Fatou の Lemma より

$$\int \underline{\lim_{n\to\infty}}\, g_n\, dm \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\int g_n\, dm$$

であるが，上式両辺をよく見れば結果が見える．

[167] $(X,\mathscr{B},m)$ を測度空間，f, f_n $(n=1,2,\ldots)$ を複素数値可測関数とする．次を示せ：

(1) $\|f_1+f_2\|\le\|f_1\|+\|f_2\|$, 但し $\displaystyle\|f\| = \int_X \frac{|f|}{1+|f|}dm \in [0,\infty]$.

(2) 任意の $\delta>0$ に対し，$\frac{\delta}{1+\delta}m(|f|\ge\delta) \le \|f\| \le \frac{\delta}{1+\delta}m(X) + m(|f|\ge\delta)$.

(3) $\|f_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (測度収束).

(4) $m(X)<\infty$ のとき「$f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, m-a.e. $\Rightarrow \|f_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \iff f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (測度収束)」

(5) $m(X)=\infty$ のとき「$f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$, m-a.e. $\not\Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (測度収束)」(例示せよ)

[168] $(X,\mathscr{B},m)$ を測度空間，$A_n\in\mathscr{B}$ $(n=1,2,\ldots)$ とする．次を示せ：

(1) $\displaystyle x\in \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{n=k}^\infty A_n \iff x$ は無限個の A_n に含まれる

(2) **Borel-Cantelli Lemma**： $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty m(A_n)<\infty \Rightarrow m(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n) = 0.$

[169] (Borel-Cantelli Lemma ([168]) の応用)
測度空間 $(X,\mathscr{B},m)$ 上の可測関数 f, f_n $(n=1,2,\ldots)$ について以下を示せ：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty m(x;\,|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon)<\infty,\ \forall\varepsilon>0 \quad\Rightarrow\quad f_n\to f,\ \ m\text{-a.e.}$

(2) $f_n\to f$, m-測度収束 $\Rightarrow$ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は m-a.e. で f に収束する部分列を持つ．

[170] 測度空間 $(X, \mathscr{M}, m)$ 上の複素数値可測関数 f に対し，

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p dm \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \inf\{\lambda \in \mathbf{R}; m(x;\ |f(x)| \ge \lambda) > 0\}, & p = \infty, \end{cases}$$

と置く ($\|f\|_p = \infty$ も許す)．次の事柄は既知とする．

(a) Hölder の不等式（$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ），三角不等式（ $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ ）.

(b) $L^p(m) = \{f \to \mathbf{C};$ 可測で $\|f\|_p < \infty\}$ は (m-a.e. に一致する元を同一視することにより) ノルム $\|\cdot\|_p$ について Banach space.

(c) $L^2(m)$ は内積: $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} dm$ について Hilbert space.

ここから問題．$p \in [1, \infty)$, f, $f_n \in L^p(m)$ $(n = 1, 2, \dots)$ とする．

(1) 次を示せ：$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に $L^p(m)$ -収束 $\Rightarrow f_n \to f$ (m-測度収束.)

(2) 次を例示せよ：$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に $L^p(m)$-収束 $\not\Rightarrow f_n \to f$, m-a.e.

[171] f を $\mathbf{R}$ 上の 2 乗可積分関数とし，自然数 n に対して $G_n(x) = f(x+n) + f(x)$ とおく．このとき次を示せ：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_n(x)|^2\, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$ が 成立する．

(2) 適当に部分列 $\{G_{n_j}\}$ をとれば $\{G_{n_j}\}$ は f に概収束するように出来る．

[172] $L^2(\mathbf{R})$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は L^2 ノルムが一様に有界で，$f \in L^2(\mathbf{R})$ にほとんど至るところ収束しているとする．このとき任意の $g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，列 $\{f_n\, g\}_{n=1}^\infty$ は fg に $L^1(\mathbf{R})$ で収束することを示せ．

[173] $(X, \mathscr{F}, m)$ は確率測度空間とし，$f, g \in L^2(m)$ に対し

$$m(f) = \int_X f dm, \quad m(f; g) = \int_X (f - m(f))(g - m(g)) dm$$

と書くことにする．$\{\xi_n\}_{n\ge1} \subset L^2(m)$ が条件「$m(\xi_m; \xi_n) = 0$ if $m \ne n$」を満たすとき以下を示せ：

(1) $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^n \xi_j$ に対し $m(S_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^n m(\xi_j)$, $m(S_n; S_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^n m(\xi_j; \xi_j)$.

(2) S_n が $n \nearrow \infty$ で $L^2(m)$-収束 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^\infty m(\xi_j)$, $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty m(\xi_j; \xi_j)$ が共に収束.

[174] 定数 $K > 0$ が存在して $\forall p \in [1, \infty]$, 及び $\forall f \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{C})$ に対し $\|f'\|_p \le K(\|f\|_p + \|f''\|_p)$ を満たすことを示せ.

[175] ノルム空間 $(E, \|\cdot\|)$ が次の性質をもつとき，$(E, \|\cdot\|)$ は strictly convex であるという：

$$x \ne y, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \ \Rightarrow\ \|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

測度空間 $(X, \mathscr{B}, m)$ に対して次を示せ：

(1) $L^1(m)$, $L^\infty(m)$ は一般には strictly convex でない (例を挙げよ).

(2) $L^p(m)$ $(1 < p < \infty)$ は strictly convex であることを示せ.

ヒント： 次のことに注意せよ；$p \in (1, \infty)$ $a, b \in \mathbf{C}$, $\lambda \in (0,1)$ に対して

$$|\lambda a + (1-\lambda)b|^p \le \lambda |a|^p + (1-\lambda)|b|^p$$
$$\text{等号成立} \iff a = b.$$

[176] 測度空間 $(X, \mathscr{M}, m)$ が $X = \mathbf{R}^n$, $\mathscr{M}$=Lebesgue 可測集合全体, m=Lebesgue 測度の場合, $L^p(m) = L^p(\mathbf{R}^n)$ と書くことにする．以下を示せ：

(1) $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ は可分である.

(2) $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ は可分ではない.

(3) $\mathscr{L}(L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n))$ は可分ではない.

[177] $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ に対して $(f * \delta_y)(x) = f(x-y)$ とおく.

(1) $p < \infty$ のとき $\lim_{|y|\to 0} \|f * \delta_y - f\|_p = 0$ を示せ.

(2) $p = \infty$ ではどうか？

[178] 以下の命題は正しいか？

(a) $f \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \cap L^1(\mathbf{R})$ なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0$.

(b) $f \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ かつ $f, f' \in L^1(\mathbf{R})$ なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0$.

(c) $f \in L^1(\mathbf{R})$ が一様連続なら $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0$.

[179] 測度空間 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上の可測関数列 f_n $(n = 1, 2, \dots)$ に対して次の 3 条件を考えよう ((U_0), (U_1) を満たすとき $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は**一様可積分**であるという).

(U_0) $\sup_n \int |f_n| dm < \infty$,

(U_1) $\lim_{\lambda\to\infty} \sup_n \int |f_n| 1_{\{|f_n| \ge \lambda\}} dm = 0$

(U_1') $\forall \varepsilon > 0$ に対して次のような $\delta > 0$ が存在:

$$\sup\{\int_E |f_n| dm;\ E \in \mathscr{B},\ m(E) < \delta\} < \varepsilon, \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

このとき以下を示せ：

(1) $U_1 \Rightarrow U_1'$.

(2) $U_0, U_1 \iff U_0, U_1'$.

(3) $m(X) < \infty$ なら「$U_0, U_1 \iff U_1$」

[180] 測度空間 $(X,\mathscr{B},m)$ 上の可測関数 f, f_n $(n=1,2,\dots)$ に対する条件を考えよう（cf. [179]）：

(C_0) $f_n \to f$, m-測度収束,
(C_1) $f \in L^1(m)$, $f_n \to f$, $L^1(m)$-収束,
(U_0) $\displaystyle\sup_n \int |f_n| dm < \infty$,
(U_1) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \sup_n \int |f_n| 1_{\{|f_n|\geq\lambda\}} dm = 0.$

このとき以下を示せ：

(1) $C_1 \;\Rightarrow\; C_0, U_0, U_1$.
(2) (1) の逆は一般には成立しない．
(3) $m(X) < \infty$ の場合は「$C_1 \Leftarrow C_0, U_1$.」

[181] $(X,\mathscr{B},m)$ を測度空間，$f : X \to \mathbf{R}$ は可測とする．以下を示せ：

(1) **Chebyshev の不等式**：$\varphi : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ は非減少とする．$\alpha \in \mathbf{R}$, $\varphi(\alpha) > 0$ なら

$$m\,(f \geq \alpha) \leq \varphi(\alpha)^{-1} \int \varphi(f) dm.$$

(2) **Paley-Zygmund の不等式**：$m(X)=1$ とする．更に $f \in L^2(m)$, $\int f^2 dm > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ とする．このとき，$(1-\alpha)\int f dm \geq 0$ ならば

$$m\left(f \geq \alpha \int f dm\right) \geq (1-\alpha)^2 \frac{\left(\int f dm\right)^2}{\int f^2 dm}.$$

ヒント：$A = \{f \geq \alpha \int f dm\}$ とし，$\int f dm = \int_A f dm + \int_{A^c} f dm$ と分解する．更に，$\int_A f dm \leq (\int f^2 dm)^{1/2} m(A)^{1/2}$, $\int_{A^c} f dm \leq \alpha \int f dm$ である．

[182] (1) **Jensen の不等式**：$(X,\mathscr{B},\mu)$ を測度空間で $\mu(X)=1$ とする．このとき，$\varphi : (a,b) \to \mathbf{R}$ $\;(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ が convex ならば，任意の $f \in L^1(\mu; X \to (a,b))$ に対して

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f) d\mu. \tag{14}$$

(2) φ が strictly convex なら (14) で「等号成立 $\iff$ f は μ-$a.e.$ で定数.」

(1) のヒント： [141] を思いだす．
(2) のヒント：「f は μ-a.e. で定数」を否定すると,「$\exists\alpha \in \mathbf{R},\ 0 < \mu(x;\, f(x) \geq \alpha) < 1$」となる．そこで，$A = \{x;\, f(x) \geq \alpha\}$ とすると，$\displaystyle\int_X f d\mu = \mu(A)\left(\frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)}\right) + \mu(A^c)\left(\frac{\int_{A^c} f d\mu}{\mu(A^c)}\right)$.

[183] $(X,\mathscr{B},m)$ を σ-finite な測度空間，$k : X^2 \to \mathbf{C}$ を $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-可測関数で，次を満たすとする：

$$\int_X |k(x,y)| m(dx) \leq M, \quad \text{a.e. } y,$$

$$\int_X |k(x,y)| m(dy) \leq N, \quad \text{a.e. } x.$$

このとき，$f \in L^p(m; X \to \mathbf{C})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対し以下を示せ：

(1) 積分 $Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)m(dy)$ は m-a.e. x で定義されて，$x \mapsto Kf(x)$ は $\mathscr{B}$-可測.

(2) $\|Kf\|_p \le M^{1/p}N^{1-1/p}\|f\|_p$.

[184] $(X, \mathscr{B}, m)$ を σ-finite な測度空間，$1 \le r < \infty$ ，$k : X^2 \to \mathbf{C}$ は $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$-可測関数で，次を満たすとする：

$$\int_X |k(x,y)|^r m(dx) \le M, \quad \text{a.e. } y,$$

$$\int_X |k(x,y)|^r m(dy) \le N, \quad \text{a.e. } x.$$

このとき，$f \in L^p(m; X \to \mathbf{C})$ $(1 \le p \le \infty)$ に対し以下を示せ：

(1) 積分 $Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)m(dy)$ は m-a.e. x で定義され，$x \mapsto Kf(x)$ は $\mathscr{B}$-可測.

(2) $\|Kf\|_q \le M^{1/q}N^{1-1/p}\|f\|_p, \quad \dfrac{1}{q} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}$.

[185] $k,\ f,\ h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ に対し以下を示せ：

(1) 積分：$(k * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} k(x-y)f(y)m(dy)$ は a.e. x で定義されて，$x \mapsto k * f(x)$ は Lebesgue-可測.

(2) Young の不等式が成立： $\|k * f\|_1 \le \|k\|_1 \|f\|_1$.

(3) $k * f = f * k$.

(4) $(k * f) * h = k * (f * h)$.

[186] $p,\ q,\ r \in [1, \infty]$ で $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ をみたすとする．$f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$ に対し以下を示せ：

(1) 積分：$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ は a.e. x で定義されて，$x \mapsto f * g(x)$ は Lebesgue-可測.

(2) Young の不等式が成立： $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(3) $f * g = g * f$.

[187] 次を示せ：

(1) $p,\ q \in (1, \infty)$ で $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ のとき，$f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$ に対 $f * g \in C_0(\mathbf{R}^n)$.

(2) $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し $f * g \in C_{\mathrm{unif}}(\mathbf{R}^n)$.

[188] λ, α を正数とする．次の $\gamma_{\lambda,\alpha} : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ をパラメーター (λ, α) の Γ-分布（の密度関数）という：

$$\gamma_{\lambda,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(\alpha), & x > 0. \end{cases}$$

関係式「$\gamma_{\lambda,\alpha} * \gamma_{\lambda,\alpha'} = \gamma_{\lambda,\alpha+\alpha'}$」を示せ．

[189] $k(x,y)$ は $(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ についての非負値可測関数で次の条件を満たすとする：

(a) $\forall y \in \mathbf{R}^n$ で $x \mapsto k(x,y)$ は下半連続，

(b) $\forall x \in \mathbf{R}^m$ で $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} k(x,y)dy = 1$.

このとき，有界可測な $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ に対して $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} k(x,y)f(y)dy$ は有界連続であることを示せ．

[190] $(X, \mathscr{B}, \mu)$, $(Y, \mathscr{C}, \nu)$ を σ-finite な測度空間，F を 直積測度空間 $(X \times Y, \mathscr{B} \otimes \mathscr{C})$ 上の可測関数, $I_F(x) = \displaystyle\int_Y |F(x,y)|\nu(dy)$ とおく．$1 \le p \le \infty$ に対し $\|I_F\|_{L^p(d\mu)} \le \displaystyle\int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(d\mu)}\nu(dy)$ を示せ．

[191] $1 \le p < \infty$ とし，関数空間 $L^p(\mathbf{R}, dx)$ の部分集合 Γ に以下の 3 条件を仮定する：

(a) $\displaystyle\sup_{f\in\Gamma} \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx < \infty$,

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \sup_{f\in\Gamma} \int_{|x|\ge r} |f(x)|^p dx = 0$,

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \sup_{f\in\Gamma} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0$.

このとき，Γ は $L^p(\mathbf{R}, dx)$ の相対コンパクト部分集合であることを，以下の方針に従って示せ：

(1) $f \in L^p(\mathbf{R}, dx)$, $t > 0$ に対し

$$T_t f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_x^{x+t} f(y)dy, & |x| \le 1/t, \\ 0, & |x| > 1/t \end{cases}$$

とおく．各 $t > 0$ に対し集合 $\Gamma_t = \{T_t f \ ; \ f \in \Gamma\}$ は $L^p(\mathbf{R}, dx)$ の相対コンパクト部分集合である．このことを，区間 $[-1/t, 1/t]$ 上の連続関数全体の集合に sup norm を与えた関数空間で Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより示せ．

(2) 次を示せ：

$$\lim_{t\to 0} \sup_{f\in\Gamma} \int_{\mathbf{R}} |T_t f(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

(3) (1), (2) の結果から結論を導け．

[192] FKG-不等式：
$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が非減少であるとは，条件

$$x_j\le y_j,\ \forall j=1,\ldots,n\ \Rightarrow\ f(x_1,\ldots,x_n)\le f(y_1,\ldots,y_n)$$

をみたすことである．$f,\,g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は非減少，μ_j $(j=1,\ldots,n)$ は $\mathbf{R}$ 上の Borel-確率測度, $\mu=\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ とする．$f,\,g,\,fg\in L^1(\mu)$ であるとき，$\displaystyle\int fg\,d\mu\ge\int f\,d\mu\int g\,d\mu$ を示せ.

[193] $\mathbf{R}^n$ 上の Borel-測度 μ は

(a) $\forall\varepsilon\in\{-1,+1\}^n$ に対し μ は変換 $x\mapsto(\varepsilon_jx_j)_1^n$ で不変、
(b) $\forall p\in[1,\infty)$ に対し $\int(1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^p\mu(dx)<\infty$,

を満たすとする．次を示せ： $\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$ に対し $\displaystyle\int\left(\prod_1^n x_j^{\alpha_j}\right)\mu(dx)\ge 0.$

[194] $\mathbf{C}^n$ 上の Borel-測度 μ は

(a) $\forall\theta\in\mathbf{R}$ に対し μ は変換 $z\mapsto e^{\sqrt{-1}\theta}z$ で不変.
(b) $\forall p\in[1,\infty)$ に対し $\int(1+|z_1|+\cdots+|z_n|)^p\mu(dz)<\infty$.

を満たすとする．このとき $\alpha,\,\beta\in\mathbf{N}^n$, $\alpha\ne\beta$ ならば $\displaystyle\int\prod_1^n z_j^{\alpha_j}\overline{z}_j^{\beta_j}\mu(dz)=0$ を示せ。

[195] $f\in C_c^1(\mathbf{R}^n\to\mathbf{C})$ $(n\ge 2)$ に対し次を示せ：

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f|^{\frac{n}{n-1}}dx\le\prod_{i=1}^n\left(\int_{\mathbf{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

[196] $(X,\mathscr{B},m)$ を測度空間とし，$f:X\times I\to\mathbf{C}$ $(I=(a,b),\ -\infty<a<b<\infty)$ について次の条件を考える：

(a) $\forall t\in I$ で $f(\cdot,t)$ は可積分.
(b) $\forall x\in X$ で $f(x,\cdot)$ は I 上可微分.
(c) $\displaystyle\int_I dt\int_X\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|m(dx)<\infty.$
(d) ある可積分関数 g が存在して $\displaystyle\sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\le g(x),\quad\forall x\in X.$

以下を示せ：

(1) 条件 (a), (b) を仮定すれば，$f,\,\frac{\partial f}{\partial t}$ は $X\times I$ 上可測.
(2) 条件 (a), (b), (c) を仮定すれば，殆んど全ての $t\in I$ に対し $\int_X f(x,t)m(dx)$ は 可微分かつ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(x,t)m(dx)=\int_X\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}m(dx).\tag{15}$$

ヒント： Fubini の定理を用いて次式を示す： $a < s < t < b$ に対し

$$\int_X f(x,t)m(dx) - \int_X f(x,s)m(dx) = \int_s^t du \int_X \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} m(dx).$$

(3) (a), (b), (d) を仮定すれば $\displaystyle\int_X f(x,\cdot)m(dx)$ は可微分かつ (15) は $\forall t \in I$ で成立.

[197] $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) = 1$, また $\varepsilon > 0$ とする．可測関数 $f : X \to \mathbf{R}$ が $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\displaystyle\int \exp(tf)d\mu < \infty$ を満たすとき，以下を示せ：

(1) $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\displaystyle\int \exp(t|f|)d\mu < \infty$.

(2) $\displaystyle\int \exp(tf)d\mu$ は $t = 0$ で無限回微分可能.

(3) $\displaystyle\frac{d^m}{dt^m} \int \exp(tf)\, d\mu \Big|_{t=0} = \int f^m \, d\mu.$

[198] $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) = 1$, また $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbf{R}$, $v \geq 0$ とする．可測関数 $f : X \to \mathbf{R}$ が $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\displaystyle\int \exp(tf)d\mu \leq \exp\Big(mt + \frac{vt^2}{2}\Big)$ を満たすとき，次を示せ：

$$\int f \, d\mu \leq m, \qquad \int \Big(f(x) - \int f d\mu\Big)^2 \mu(dx) \leq v.$$

[199] Lebesgue 可測集合 A, $B \subseteq \mathbf{R}$ について次を示せ．ただし Lebesgue 測度を m で表す.

(1) $\mathbf{R} \ni x \mapsto m((A+x) \cap B) \in [0, \infty]$ は可測で

$$\int_{\mathbf{R}} m((A+x) \cap B)dx = m(A)m(B).$$

(2) $m(A) > 0$, $m(B) > 0$ のとき，$m((A+q) \cap B) > 0$ となる $q \in \mathbf{Q}$ が存在することを示せ.

[200] 集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ が正の Lebesgue 測度をもてば，集合 $B = \{x - y;\, x, y \in A\}$ は $\mathbf{R}^n$ の原点の近傍を含むことを示せ.
ヒント：$f(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} 1_A(x+y)1_A(y)dy$ が連続であることを使え.

[201] f, g: $(0, \infty) \to \mathbf{R}$ をともに広義単調減少で

$$m(\{x; f(x) > a\}) = m(\{x; g(x) > a\}) \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

が成り立つとき，$f = g$ a.e. in $(0, \infty)$ となることを示せ.

[202] 区間 $(0, 1]$ の点を 3 進展開したとき，展開に 1 が決して現れない集合を C とする．ただし，展開が 2 通り可能な場合は，無限小数になる方を取る．C は Lebesgue 測度 0 の完全集合 (i.e., 任意の点が C の集積点) であることを示せ．集合 C を Cantor 集合と呼ぶ.

[203] 区間 $(0,1]$ の点 x の 2 進展開を $x = 0.x_1x_2\cdots$ と表す．ただし，展開が 2 通り可能な場合は，無限小数になる方を取る．このとき $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$ と定め，$t \in [0,1]$ に対し

$$\varphi(t) = m(\{x \in (0,1];\, F(x) \le t\}) \quad (m \text{ は Lebesgue 測度})$$

とおく．$\varphi(t)$ は単調非減少連続関数であること，および Cantor 集合の補集合上で $\varphi'(t) = 0$ となることを示せ．関数 $\varphi(t)$ を Cantor 関数と呼ぶ．

[204] 関数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ を

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1/3] \\ 0, & x \in (1/3,2/3) \\ 3x-2, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

で定め，$[0,1]$ 上の関数列 $f^{(n)}, n = 0,1,\ldots$ を

$$f^{(0)}(x) = x, \quad f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \quad n = 1,2,\ldots, \quad x \in [0,1]$$

によって定める．さらに $\chi(x) = 1_{(1/3,1]}(x)$ とおいて

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(f^{(n)}(x))}{2^{n+1}}, \quad x \in [0,1]$$

と定義すると，この関数 φ は [203] の Cantor 関数と一致することを示せ．さらに Cantor 関数は関数方程式

$$\varphi = \frac{\chi}{2} + \frac{1}{2}\varphi \circ f$$

の一意解として特徴づけられることを示せ．

[205] $\mathscr{M} = \{f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}\ ;\ f \text{ は有界可測関数で } \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ が有限で存在}\}$ とする．$k(x) \ge 0$ は $(0,\infty)$ 上の可測関数で次を満たすとする：

(a) $\displaystyle\int_0^a k(x)\,dx < \infty, \quad \forall a > 0.$

(b) $K(x) = \displaystyle\int_0^x k(y)\,dy$ は恒等的に 0 ではない．

このとき次の (1), (2) は同値であることを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} K(x) = \infty.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{K(x)} \int_0^x k(y)f(y)\,dy = \lim_{x\to\infty} f(x), \quad \forall f \in \mathscr{M}.$

[206] $\mathscr{M}$ は [205] と同じとし，$k\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ を非負単調非減少関数とする．$K(x) = \displaystyle\int_0^x k(y)\,dy$ として $K(x)$ は恒等的に 0 ではなく，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{k(x)}{K(x)} = 0$ がみたされているとする．このとき

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{K(x)} \int_0^x k(x-y) f(y)\,dy = \lim_{x\to\infty} f(x), \quad \forall f \in \mathscr{M}$$

が成り立つことを示せ．

[207] $f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ を有界可測関数，$\alpha > 0$ とする．このとき次を示せ：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\Big(\int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy\Big)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(y)\,dy \cdot \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx, \quad \forall\lambda > 0.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy$ が存在するとき，次が成り立つ．

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(y)\,dy = \lim_{x\to\infty} \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy$$

[208] $f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ を有界可測関数で $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$ が成り立つとする．このとき，次の二つの極限 $\displaystyle\lim_{\lambda\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(y)\,dy$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (x-y) f(y)\,dy$ は，一方が存在すれば，他方も存在し，その極限は等しいことを示せ．

[209] $n \geq 3$ とし，f を $\mathbf{R}^n$ 上の有界可測関数で，support がコンパクトであるとする．このとき次を示せ：

(1) $\forall x \in \mathbf{R}^n$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,dy < \infty.$

(2) $B_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^n;\ |x-y| < r\}$ とおく．$x \in \mathbf{R}^n$ に関して一様に $\displaystyle\lim_{r\downarrow 0} \int_{B_r(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,dy = 0$ が成り立つ．

(3) x の関数 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy$ は $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数である．

[210] 以下を示せ：

(1) $f \in C^2(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C})$ について次の (a), (b) は同値である．

(a) 全ての $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ で $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$

(b) $f_j \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{C})$ $(j = 1,2)$ が存在して全ての $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ で $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y).$

(2) $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C})$ 及び $c > 0$ について次の (c), (d) は同値である：

(c) 波動方程式 $\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) u(x,t) = 0$ を満たす．

(d) 関数 $f_\pm \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{C})$ が存在して $u(x,t) = f_+(x+ct) + f_-(x-ct)$ と書ける．

[211] $f \in C^2(\mathbf{R} \to \mathbf{C})$, $g \in C^1(\mathbf{R} \to \mathbf{C})$ とするとき関数

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{ f(x+ct) + f(x-ct) + c^{-1}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \Big\} \tag{16}$$

は，$C^2(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C})$ に属し $\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)u(x,t) = 0$, $u(\cdot, 0) = f$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = g$ を満たす．また これらの条件を全てみたす $C^2(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C})$ の元は (16) で与えられる u に限る．

[212] $f \in C^2(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R})$ に対し，次の 2 条件が同値であることを示せ。

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \forall i, \forall j\ (i \neq j)$.

(b) $f(x) + f(y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y), \quad \forall x, \forall y \in \mathbf{R}^n$.

ただし，$x \vee y = (\max\{x_i, y_i\})_{i=1}^n$, $x \wedge y = (\min\{x_i, y_i\})_{i=1}^n$.

[213] 熱方程式の基本解：
関数 $g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/2t}$ $((x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty))$ を Gauss 核という．

$L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に属する Borel-可測関数 f に対し convolution $(g_t * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbf{R}^n$ で定義され，$g_t(x)$, $(g_t * f)(x)$ は $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty)$ について C^∞ で次の熱方程式を満たすことを示せ：

$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ と定義するとき $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta\Big)g_t(x) = 0$, $\Big(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta\Big)(g_t * f)(x) = 0$.

ヒント： $(g_t * f)(x)$ の微分可能性を言う際，次のことを予め注意しておくと見通しがよい：
$\alpha \in \mathbf{N}^n$ $m = 0, 1, \ldots$ に対し，$\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha \Big(\dfrac{\partial}{\partial t}\Big)^m g_t(x) = (x,\ t^{-1/2}$ の多項式 $) \times e^{-|x|^2/2t}$.

[214] Laplace 方程式の基本解：
Green 核 $U_n : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ を次のように定義する：

$$U_n(x) = U_n(|x|) = \begin{cases} -|x| & n = 1, \\ -\dfrac{\log|x|}{\pi} & n = 2, \\ \dfrac{2|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_{n-1}} & n \geq 3. \end{cases}$$

ここで，$\omega_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ ($\mathbf{R}^n$ の球面の表面積 cf. [101])．次を示せ：

(1) $|\alpha| \geq 1$ なる多重指数 $\alpha \in \mathbf{N}^n$ に対し，$\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha U_n = \dfrac{x \text{ の } |\alpha| \text{ 次多項式}}{|x|^{n-2+2|\alpha|}}$. また，$\Delta_x = \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ に対し $\Delta_x U_n(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$.

(2) 関数

$$p_y(x) = \frac{2}{\omega_n}\frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty)$$

を上半空間 $\mathbf{R}^n \times (0,\infty) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の Poisson 核という．$L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-関数 f に対し convolution $(p_y * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbf{R}^n$ で定義されて $p_y(x)$ 及び $(p_y * f)(x)$ は $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty)$ について C^∞ かつ調和である．すなわち $\left(\Delta_x + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) p_y(x) = 0$, $\left(\Delta_x + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(p_y * f)(x) = 0$.

ヒント： (2) で (1) の結果が使える．$p_y(x) = -\dfrac{\partial U_{n+1}(x,y)}{\partial y}$.

[215] Gauss 核 $g_t(x)$ ($x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$, cf. [213]) と Green 核 U_n (cf. [214]) について次を示せ：

$$U_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (g_t(x) - g_t(0))dt, & n = 1, \\ \displaystyle\int_0^\infty (g_t(x) - g_t((1,0)))dt, & n = 2, \\ \displaystyle\int_0^\infty g_t(x)dt, & n \ge 3. \end{cases}$$

[216] Gauss 核の Laplace 変換：Gauss 核 $g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2t)$ $(x \in \mathbf{R}^n, t > 0)$ 及び $b > 0$ に対し次式を示そう.

$$\int_0^\infty e^{-bt} g_t(x)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2b}} e^{-|x|\sqrt{2b}} & n = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi|x|} e^{-|x|\sqrt{2b}} & n = 3. \end{cases} \tag{17}$$

その為 $a \in \mathbf{R}$, $b > 0$ に対し関数 $f_{a,b} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ を $f_{a,b}(r) = \displaystyle\int_0^\infty t^{a-1} \exp\left(-bt - \frac{r^2}{t}\right) dt$ で定義する．以下を示せ：

(1) $f_{a,b}(r)$ を定める積分は確定する.

(2) $a > 0$ ならば $\lim_{x \to 0} f_{a,b}(x) = b^{-a}\Gamma(a)$.

(3) $f_{a,b}(r) = (r^2/b)^a f_{-a,b}(r)$.

(4) $f'_{a,b}(r) = -2(r^{2a-1}/b^{a-1}) f_{a-1,b}(r)$,

(5) $f_{1/2,b}(r) = \exp(-2r\sqrt{b})\sqrt{\pi/b}$,

(6) $f_{-1/2,b}(r) = \exp(-2r\sqrt{b})\sqrt{\pi}/r$ for $r > 0$,

(7) (17) が成立.

[217] δ-関数の近似：$\varphi \in L^1(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R})$, $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$ とする．$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ に対し以下を示せ.

(1) $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ に対し $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$.

ヒント：

$$
\begin{aligned}
|f*\varphi_\varepsilon(x)-f(x)|^p &= \left|f*\varphi_\varepsilon(x)-\int f(x)\varphi_\varepsilon(y)dy\right|^p \\
&\le \left(\int |f(x-y)-f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|dy\right)^p \\
&\le \|\varphi\|_1^{p-1}\int |f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_\varepsilon(y)|dy \\
&= \|\varphi\|_1^{p-1}\int |f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p|\varphi(y)|dy
\end{aligned}
$$

(2) $f\in C_b(\mathbf{R}^n\to\mathbf{C})$, compact set $K\subseteq\mathbf{R}^n$ に対し，$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in K}|(f*\phi_\varepsilon-f)(x)|=0$.

[218] δ-関数の滑らかな関数 (mollifier) での近似：
$\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n\to[0,\infty))$ を $\varphi(x)=0$ on $|x|>1$, $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi=1$ なるように選び，$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ とおく.

(1) $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\le p\le\infty)$ に対し，次のことを示せ.
  (a) $f*\varphi_\varepsilon(x)$, $\varphi_\varepsilon*f(x)$ は $\forall x\in\mathbf{R}^n$ で定義され，$f*\varphi_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon*f(x)$.
  (b) $f*\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^n\to\mathbf{C})$, $\|f*\varphi_\varepsilon\|_p\le\|f\|_p$.
  (c) $f(x)=0$ a.e. on $|x|>R\Rightarrow f*\varphi_\varepsilon(x)=0$ on $|x|>R+\varepsilon$.

(2) $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{f\in C^\infty(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{supp}\,[f]$ は compact $\}$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$ の中で稠密であることを示せ.

(3) $g\in C_b(\mathbf{R}^n)$ に対して $g_l\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ であって，任意の compact set $K\subset\mathbf{R}^n$ に対し，

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{x\in K}|g(x)-g_l(x)|=0$$

なるものが存在することを示せ.

[219] 熱方程式の境界値問題：Gauss 核 $g_t(x)=(2\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/2t}$ $((x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0,\infty))$ について次を示せ：

(1) $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\le p\le\infty)$ に属する Borel-可測関数 f に対し convolution $(g_t*f)(x)$ は $\forall x\in\mathbf{R}^n$ で定義され $\|g_t*f\|_p\le\|f\|_p$.

(2) $p<\infty$ ならば

$$\lim_{t\to 0}\|g_t*f-f\|_p=0. \tag{18}$$

(3) $f\in C_b(\mathbf{R}^n\to\mathbf{C})$ なら，任意の compact set $K\subset\mathbf{R}^n$ に対し，

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in K}|(g_t*f)(x)-f(x)|=0.$$

[220] $\mathbf{R}$ 上の関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x)=\cos 4\pi n^3 x,\quad n\le|x|\le n+1,\quad n=0,1,2,\ldots$$

で定める．1 次元 Gauss 核 $g_t(x)=\sqrt{2\pi t}^{\,-1}e^{-|x|^2/2t}$ に対して $(g_t*\psi)(x)$ は $t\to 0$ のとき ψ には一様収束しないことを示せ.

[221] Laplace 方程式の境界値問題：上半空間 $\mathbf{R}^n \times (0,\infty) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の Poisson 核 $p_y(x)$ (cf. [214]) について次を示せ：

(1) $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ に属する Borel-関数 f に対し convolution $(p_y * f)(x)$ は $\forall x \in \mathbf{R}^n$ で定義されて $\|p_y * f\|_p \le \|f\|_p$.

(2) $p < \infty$ ならば

$$\lim_{y\to 0} \|p_y * f - f\|_p = 0. \tag{19}$$

更に $f \in C_b(\mathbf{R}^n \to \mathbf{C})$ ならば，任意の compact set $K \subset \mathbf{R}^n$ に対し，

$$\lim_{y\to 0} \sup_{x\in K} |(p_y * f)(x) - f(x)| = 0.$$

[222] Gauss 核 $g_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\Big(-\dfrac{|x|^2}{2t}\Big)$ $t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n$ に対し，その近似多項式 $g_{t,N}(x) = (2\pi t)^{-n/2} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{\nu!}\Big(-\frac{|x|^2}{2t}\Big)^{\nu}$ を考える．$f \in C_c^m(\mathbf{R}^n \to \mathbf{C})$, α を $0 \le |\alpha| \le m$ なる多重指数とするとき，以下を示せ：

(1) $(f * g_{t,N})(x)$ は x の多項式である．

(2) 任意の compact 集合 $K \subset \mathbf{R}^n$ に対し

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in K} |D^\alpha (f * g_t)(x) - D^\alpha f(x)| = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha (f * g_{t,N})(x) - D^\alpha (f * g_t)(x)| = 0.$$

(3) 多項式の列 $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して，任意の compact 集合 $K \subset \mathbf{R}^n$ に対し

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha (f_k)(x) D^\alpha (f)(x)| = 0.$$

(4) K を $\mathbf{R}^n$ の compact subset, U を K の近傍（K を含む 開集合）とするとき，$h \in C^m(U)$ に対し，多項式の列 $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha (h_k)(x) - D^\alpha (h)(x)| = 0.$$

[223] Green 核が原点に置かれた単位質量 (電荷) に対する potential であること：$\mathbf{R}^n$ の Green 核 U_n (cf. [214]) は次の意味で方程式「$-\frac{1}{2}\Delta U_n = \delta_0$ 」を満たすことを示そう：

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} U_n \Delta\varphi \, dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

$U_n^{(\varepsilon)}(x) = U_n(|x|_\varepsilon)$ $(|x|_\varepsilon = (|x|^2 + \varepsilon^2)^{1/2},\ \varepsilon \ge 0$) について次を示せ：

(1) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し，$-\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} U_n^{(\varepsilon)} \Delta\varphi \, dx \overset{\varepsilon\to 0}{\to} -\int_{\mathbf{R}^n} U_n \Delta\varphi \, dx.$

(2) $|x|_\varepsilon > 0$ なるとき，

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} U_n^{(\varepsilon)}(x) = \frac{x_j}{\omega_{n-1}|x|_\varepsilon^n},$$
$$\psi_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\Delta U_n^{(\varepsilon)}(x) = \frac{n\varepsilon^2}{\omega_{n-1}|x|_\varepsilon^{n+2}} = \varepsilon^{-n}\psi_1(x/\varepsilon).$$

(3) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \psi_1\,dx = 1.$

(4) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し，$\displaystyle -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} U_n^{(\varepsilon)}\Delta\varphi\,dx = \int_{\mathbf{R}^n}\psi_\varepsilon\varphi\,dx \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0).$

[224] Haar 関数 $h_{n,k} : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ $(n,k = 0,1,\dots)$ を次のように定義する：

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \text{ and } t\in[k,k+1), \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n\geq 1 \text{ and } t\in[2k/2^n,(2k+1)/2^n), \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n\geq 1 \text{ and } t\in[(2k+1)/2^n,(2k+2)/2^n), \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

このとき，$\{h_{n,k}\}_{n,k\geq 0}$ は $L^2[0,\infty)$ の CONS であることを示せ．
ヒント： 直交性を示すのは難しくない．

$$\bigcap_{n,k\geq 0}\{g\in L^2[0,\infty)\ ;\ \langle h_{n,k},g\rangle = 0\} = \{g\equiv 0\}$$

は次のように示す． g が上式左辺に属するとし，不定積分 $G(t)=\int_0^t g(s)ds$ を考える．

$$\begin{aligned} G(k+1)-G(k) &= 0, \quad k=0,1,\dots \\ G\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) - \tfrac{1}{2}G\left(\frac{2k}{2^n}\right) - \tfrac{1}{2}G\left(\frac{2k+2}{2^n}\right) &= 0 \quad n=1,2,\dots,\quad k=0,1,\dots \end{aligned}$$

を示し，そこから $G\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = G(0)$ $(n,k=0,1,\dots)$ を導く．

[225] D は C^1-超曲面を境界として持つ $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 2)$ の有界領域で単位外法線ベクトル場 $\nu\in C(\partial D\to S^{n-1})$ が存在するものする．次を示せ：

(1) $f\in C^1(\overline{D}\to\mathbf{C})$, $g\in C^2(\overline{D}\to\mathbf{C})$ に対し

$$\int_D (f\Delta g + \langle\nabla f,\nabla g\rangle)\,dx = \int_{\partial D} f\langle\nabla g,\nu\rangle\,d\sigma,$$

ここで，σ は ∂D の表面積要素．なお次の Stokes の公式を証明なしで使ってもよい；

$$\int_{\partial D}\langle F,\nu\rangle\,d\sigma = \sum_{j=1}^n\int_D \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\,dx,\quad \forall F\in C^1(\overline{D}\to\mathbf{R}^n).$$

(2) $f\in C^2(\overline{D}\to\mathbf{C})$ が次の何れかを満たすとする：

(a) ∂D 上 $f=0$ (Dirichlet 境界条件),
(b) ∂D 上 $\langle\nabla f,\nu\rangle = 0$ (Neuman 境界条件).

このとき，$\displaystyle -\int_D f\Delta f dx = \int_D |\nabla f|^2\,dx.$

[226] 静電場に対する Gauss の法則「領域の境界を貫く全電力束=領域内の全電荷」を示そう．D は C^1-超曲面を境界として持つ $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 3$, 物理的には $n=3)$ の有界領域で単位外法線ベクトル場 $\nu\in C(\partial D\to S^{n-1})$ が存在するものする．以下を示せ：

(1) $x \in R^n$ における単位正電荷が $y \in R^n$ につくる電場：$E_x(y) = \dfrac{y-x}{\omega_{n-1}|y-x|^n}$ $(x, y \in \mathbf{R}^n$ また $\omega_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ は単位球面の表面積 cf. [101]) について，

$$\int_{\partial D} \langle E_x, \nu \rangle \, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D \\ 0 & \text{if } x \notin \overline{D}. \end{cases}$$

ここで，σ は ∂D の表面積要素．

(2) 正電荷が D 上の Borel-有限測度 m で分布し，条件 $\displaystyle\int_{\partial D} \sigma(dx) \int_D \frac{m(dy)}{|x-y|^{n-1}} < \infty$ を満たすとき，電場 $E_m(y) = \displaystyle\int_D E_x(y) m(dx)$ は $L^1(\sigma; \partial D \to \mathbf{R}^n)$ の元として定義できて，次の Gauss の法則が成立する：

$$\int_{\partial D} \langle E_m, \nu \rangle \, d\sigma = m(D).$$

[227] $G \subset \mathbf{R}^n$ は $B(x;r) = \{y \in \mathbf{R}^n;\ |y-x| \le r\}$ を含む開集合とする．調和関数 $u \in C^\infty(G \to \mathbf{C})$（$\Delta u = 0$ on G）について，mean value property を示せ：

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\partial B(x;r) \text{ の表面積}} \int_{\partial B(x;r)} u(y)\, dy \\ &= \frac{1}{B(x;r) \text{ の体積}} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \end{aligned}$$

[228] $\mathbf{R}^n$ 上の有界な調和関数は定数に限ることを示せ．

[229] $\mathbf{R}^n$ 上の調和関数 u で $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ に属するものは $u \equiv 0$ に限ることを示せ．

[230] 問題 [228] の離散版：関数 $h : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{R}$ が条件「$h(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|e|=1} h(x+e),\quad \forall x \in \mathbf{Z}^d$」を満たすとき h を調和関数という (ただし，$|e| = |e|_{\mathbf{R}^d}$)．このとき次に答えよ：

(1) 定数でない調和関数の例を挙げよ．

(2) 有界な調和関数は定数にかぎること (Liouville の定理) を示せ．

ヒント： まず $\displaystyle\sup_{x \in \mathbf{Z}^d} f(x) = M \in (0, \infty)$ となる調和関数 f を考えこの f について以下を示す．

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in \mathbf{Z}^d$, $\forall n \ge 1$, $\min_{|e|=1} f(x_\varepsilon + ne) \ge M - \varepsilon(2d)^{-n}$
- $\exists x_0 \in \mathbf{Z}^d$, $\forall e \in \{x \in \mathbf{Z}^d;\ |x| = 1\}$, $\sup_n \sum_{k=1}^n f(x_0 + ke) = \infty$.

次に h を有界な調和関数とする．$|e| = 1$ にたいし $f_e = h(\cdot + e) - h$ は再び有界な調和関数となるが，f_e について「$\displaystyle\max_{|e|=1} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d} f_e(x) \le 0$」がいえる．これは h が定数である事を意味する．

[231] 次を示せ

(1) (Hadamard の 3 円定理) $f(z)$ は $\rho < |z| < R$ で正則とし，$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ とおく．$\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ のとき

$$\log M(r_2) \le \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_3)$$

が成り立つ．

(2) (Doetsche の 3 線定理) $a < \mathrm{Re}\, z < b$ で有界正則な $f(z)$ に対し，$L(x) = \sup_y |f(x+iy)|$ とおく．$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ のとき

$$\log L(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \log L(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \log L(x_3)$$

が成り立つ．

ヒント：(1) $a = \dfrac{\log M(r_1) - \log M(r_2)}{\log r_3 - \log r_1}$ とおけば $r_1^a M(r_1) = r_3^a M(r_3)$．$F(z) = z^a f(z)$ は 1 価ではないが $|F(z)|$ は連続なので最大値の原理が使えて $r_2^a M(r_2) \le r_1^a M(r_1)$．
(2) $\alpha = \dfrac{\log L(x_1) - \log L(x_2)}{\log x_3 - \log x_1}$ とおけば $e^{\alpha x_1} L(r_1) = e^{\alpha x_3} L(r_3)$．$F(z) = e^{\alpha z} f(z)$ が $x_1 \le \mathrm{Re}\, z \le x_3$ で有界であることに注意して最大値の原理を使って $e^{\alpha x_2} L(x_2) \le e^{\alpha x_1} L(x_1)$ を出す．

[232] $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ で

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}$$

が成り立つことを示せ．また右辺は $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ で広義一様収束することを示せ．
ヒント：

$$h(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}$$

とおけば，$h(z)$ は整関数で，$\displaystyle\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty} h(z) = 0$ から $h \equiv 0$ を導け．

[233] $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ で

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

が成り立つことを示せ．また右辺は $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ で広義一様収束することを示せ．

[234] $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\pi\}$ 上の関数 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ の原点における Taylor 展開を $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ とする．B_n を Bernoulli 数と呼ぶ．このとき次を示せ．

(1) $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_{2n+1} = 0\ (n \ge 1)$ が成り立つ．

(2) $z \cot z = f(2iz) + iz$.

(3) 次の等式が成り立つ．

$$z\cot z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n}.$$

ただし $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ である．

(4) 次の等式が成り立つ．

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}.$$

特に $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

ヒント：(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1$ から $B_0 = 1$ および漸化式

$$\frac{B_n}{n!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \cdots + \frac{B_1}{1!n!} + \frac{B_0}{(n+1)!} = 0 \qquad (n \geq 1)$$

を導く．また $\displaystyle\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ は z の偶関数であることに留意せよ．

(3) [233] の展開で $\displaystyle\frac{z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{z}{n\pi}\Big)^{2k}$ を使え．

[235] $\{u_n\}$ が 領域 D における正則関数列であって，無限積

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$$

が D において広義一様収束すれば，$f(z)$ は D において正則であることを示せ．さらに $N = \{z \in D;\ f(z) = 0\}$ とすれば，

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)}, \qquad z \in D \setminus N$$

が成り立つことを示せ．

[236] 次の無限積表示を示せ．

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\Big).$$

ヒント：右辺をが $\mathbf{C}$ で広義一様収束することを示し $f(z)$ とおく．[235] を使って

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \cot z \qquad z \in \mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}.$$

さらに $\displaystyle\frac{\sin' z}{\sin z} = \cot z$ とあわせて $\displaystyle\left(\frac{f(z)}{\sin z}\right)' = 0$ を示せ．

[237] (Gamma 関数)　**C** 上の関数 $g(z)$ を次で定義する：

$$g(z) = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}, \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\Big) \quad \text{(Euler constant)}$$

このとき次を示せ．

(1) 右辺は **C** で広義一様収束する．従って $g(z)$ は整関数である．

(2) $g(z)$ の零点は非正整数 $-\mathbf{N}\cup\{0\}$ で，それらは 1 次の零点である．

(3) $1/g(z)$ は有理型関数で極の集合は $-\mathbf{N}\cup\{0\}$ である．$1/g(z)=\Gamma(z)$ として Gamma 関数を定義する．

[238] $P=-\mathbf{N}\cup\{0\}$ とする．次を示せ：

(1)
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \quad z\in\mathbf{C}\setminus P.$$

(2)
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z\in\mathbf{C}\setminus P.$$

(3)
$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin\pi z}{\pi}, \quad z\in\mathbf{C}.$$

(4)
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z}-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\Big) \quad z\in\mathbf{C}\setminus P.$$

(5)
$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} \quad z\in\mathbf{C}\setminus P.$$

(6)
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

ヒント：(2) (1) を使え．
(3) $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$ と [237] の定義を使え．
(4) [235] を使え．
(6) (1) を使え．

[239] 関数 $g_m(z)$ を

$$g_m(z) = \int_0^m\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^m t^{z-1}dt = m^z\int_0^1(1-t)^m t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Re}\,z>0$$

で定めるとき，次を示せ．

(1)
$$g_m(z) = \frac{m^z\cdot m!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

(2)
$$\lim_{m\to\infty}g_m(z) = \int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}.dt$$

(3)
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

(4)
$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}(\log t)^n dt.$$

ヒント：(1) 部分積分を繰り返す.
(3) [238] (1) を使え.

[240] $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ とおいて，次を示せ.

(1)
$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}.$$

(2) $n \in \mathbf{N}$ に対し，$\psi(n) = -\gamma + \varphi(n-1)$. ただし $\varphi(m) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{m}$.

(3)
$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t}\log t\, dt$$

ヒント：(1) [238] (2) を対数微分する.
(2) [238] (4) を用いて具体的に計算する.
(3) (2) で $n = 1$ として $\psi(1) = -\gamma$ が得られる．そこで $\Gamma(1) = 1$ と $\Gamma'(z)$ の表示 [239] (4) を使う.

[241] Beta 関数 $B(z,w)$ を

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} z, w > 0$$

で定める．このとき次を示せ：

(1)
$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \operatorname{Re} z, w > 0.$$

(2)
$$B(z,z) = 2^{1-2z}B(z,\tfrac{1}{2}), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(3)
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

ヒント： (2) $s = 4t(1-t)$ で変数変換する.
(3) (2) を (1) の表示を用いて Gamma 関数の関係式にする.