2024年度 ガロア祭 懸賞問題

6月14日(金) に行いますガロア祭において、優秀な解答者を発表します。優れた解答には、豪華賞品が出ます。(該当者には別途連絡を差し上げます。) もちろん一問だけでもよいので、奮ってご応募ください。

解答の提出方法
提出締切: 6月7日(金) 16:00
提出先: 理学研究科3号館1階 数学教室事務室.

懸賞問題は次のページ以降にあります。

2024年度ガロア祭委員
筒井容平・宋珠愛

問題 1 (出題者: 筒井容平): 実係数実 1 変数の $m \in \mathbb{N}$ 次多項式

$$P_0(x) = \prod_{j=1}^{m} \left(x - x_j^0\right), \ (x \in \mathbb{R})$$

を考えます. また, $I \subset \mathbb{R}$ を有界開区間とします.

(i) $0 \in I$ であるとき, P_0 を初期値とする初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, \ (t \in I, \ x \in \mathbb{R}), \\ u(0,x) = P_0(x), \ (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

は, x について m 次多項式となっている解 $P = P(t,x)$ を持ちます. これを求めてください.

(ii) (i) の解 P は各時刻 $t \in I$ で零点 $\{x_j(t)\}_{j=1}^m$ を持ち, $x_j \neq x_k$, $(j \neq k)$ とします. つまり, $P(t, x_j(t)) = 0$, $(t \in I)$ です. このとき, 各 x_j の時間発展を $\{x_k\}_{k \neq j}$ で記述してください.

(iii) $\{x_j\}_{j=1}^m$ をそれぞれ何かの粒子だと考え, これらの衝突について (数学的に) 論じてください.

問題 2 (出題者: 筒井容平): (i) $\mathbb{R}$ の任意の開集合 U は, 以下のような高々加算個の空でない開区間の族 $\{I_j\}_j$ を用いて, $U = \cup_j I_j$ と書けることを示してください; $I_j = (a_j, b_j)$ とすると

$$\begin{aligned} &(1) \ I_j \cap I_k = \varnothing, \ \text{if } j \neq k, \\ &(2) \ a_j, b_j \notin U. \end{aligned}$$

(ii) $I = [a,b]$ は有界閉区間で, f は I 上の実数値連続函数とします. このとき, 以下を満たす互いに素な高々加算個の空ではない有界開区間 $I_j = (a_j, b_j)$ が存在することを示してください.

(1) $I_j \subset I$,
(2) 各 j に対して, "$f(a_j) = f(b_j)$ " or "$a_j = a$ & $f(a_j) \leq f(b_j)$ ",
(3) $x \in (a,b]$ かつ $x \notin \bigcup_j I_j$ ならば $\sup_{x \leq y \leq b} f(y) \leq f(x)$.

さらに この主張を図示してください.

問題 3 (出題者: 宋珠愛): G を重みなし無向有限連結グラフで多重辺とループの存在を許したものとする．ただし，G の頂点集合が空であることは許さない．E で G の辺集合を表すものとする．$l : E \to (0, \infty)$ とし，$\mathit{\Gamma}$ を組 (G, l) から次のようにして定まる距離空間とする：各辺 $e \in E$ を閉区間 $[0, l(e)]$ と同一視し，G の構造で張り合わせる．

さらに，$\mathrm{Rat}(\mathit{\Gamma})^*$ で，うまく $\mathit{\Gamma}$ を有限個の閉区間に分割すればその各閉区間上整数の一定の傾きを持つ連続関数 $\mathit{\Gamma} \to \boldsymbol{R}$ 全体の集合を表すものとする．

(1) $\mathit{\Gamma}$ が閉区間 $[0,1]$ のとき，$\mathrm{Rat}(\mathit{\Gamma})^*$ の有限個のある元 $f_1, \ldots, f_n$ で，これらと全ての $\mathit{\Gamma}$ 上の実数値定数関数から次の三つの操作を有限回繰り返すことにより，$\mathrm{Rat}(\mathit{\Gamma})^*$ の任意の元 f を得られるようなものが存在することを示せ（$f_1, \ldots, f_n$ を見つけ，f を実際に作ってみせよ）．

次で定まる g, h の和 $g \oplus h$ を取る操作，すなわち，

$$(g \oplus h)(x) := \max\{g(x), h(x)\},$$

次で定まる g, h の積 $g \odot h$ を取る操作，すなわち，

$$(g \odot h)(x) := g(x) + h(x),$$

g の積 $\odot$ についての逆元 $g^{\odot(-1)}$ を取る操作，すなわち，

$$g^{\odot(-1)}(x) = -g(x),$$

ここで，$g, h \in \mathrm{Rat}(\mathit{\Gamma})^*$，$x \in \mathit{\Gamma}$ である．

(2) $\mathit{\Gamma}$ が円周と同相のとき（すなわち，ある適当な長さの円周のとき），(1) と同様の $f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ．

(3) $\mathit{\Gamma}$ が上記のような一般の組 (G, l) から得られた距離空間のとき，(1) と同様の $f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ．

(4) 上記の問題を和 $\oplus$ と積 $\odot$ を取る二つの操作で考えると，同じような $f_1, \ldots, f_n$ を見つけることは可能か？

問題 4 (出題者: 宋珠愛): 写像 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ で次の二条件を満たすものを全て求めよ：

$$f(\max\{a, b\}) = \max\{f(a), f(b)\}, \quad f(a + b) = f(a) + f(b),$$

ここで，$a, b \in \boldsymbol{R}$ である．