Lieb-McGuire系のL^2解に対する Heckman-Opdam program

加藤周*

平成 21 年 12 月 11 日

概 要

[CK09] §4.1 では BC_N 型 affine Hecke 環の (反) 球型離散系列表現を分類した。これは Lieb-McGuire 系と呼ばれる可積分系の (引力相互作用の基における) 二乗可積分解と BC_N 型 affine Hecke 環の (反) 球型離散系列表現が 1 対 1 対応するという Heckman-Opdam の定理と併せて引力相互作用を持つ Lieb-McGuire 系の二乗可積分解の分類を与える。この論説ではそこのを survey する。

1 Lieb-McGuire系

量子力学の Schrödinger 型の定式化では (時間に依存しない直線上の)N 粒子の族は $\mathbb{R}^N$ 上の波動関数 $\psi(x)$ であって

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|^2 dx = 1 < \infty$$

となるものであって (時間に依存しない) 波動方程式

$$H\psi = E\psi$$

を満たすようなものとして与えられる。ただし、H は Hamiltonian であり、(時間に依存しない)Laplacian Δ とポテンシャル $V(x)$ を用いて (規格化すると)

$$H = \Delta + V(x) \tag{1.1}$$

*京都大学数理解析研究所, E-mail: kato@kurims.kyoto-u.ac.jp

の様に書け、E はエネルギーであり適当なスカラーである。

さて、1 粒子系において $V(x)$ が原点から極めて短距離の外側では無視できるとした場合には $V(x)$ として $\delta(x)$ もしくはその微分の線形結合を取るのが自然である。最も簡単なのは $N=1$ で $V(x)=c\delta(x)$ となる場合で、この時には (1.1) の事を δ 関数ポテンシャルを持つ系と呼ぶ。

この時 c を実数と思うと $c<0$ の場合が原点への引力、$c>0$ の場合が原点への斥力が存在する事に対応している。つまり、$x=0$ に壁が存在して $c<0$ ならば粒子を吸い寄せ、$c>0$ ならば粒子を弾いていると考える事ができる。これは実際 $c<0$ の時には L^2 解が存在し、$c>0$ の時には存在しないことからも間接的に確かめる事ができる。(斥力が働くと粒子の存在確率である $\psi(x)$ は $x>0$ という領域で単調増加であると考えられるため。)

この構成では x を 2 粒子間の距離、$V(x)$ を 2 粒子間の相互作用と考える事もできる (つまり、2 粒子間の相互作用が極めて近い距離でしか働かないと考えた時のもっとも簡単な系であると考える事ができる。)

以上の考察から、n 個の (同じ)1 次元粒子が δ 関数ポテンシャルで相互作用している時の Hamiltonian は

$$H_0=\Delta+c\sum_{1\le i<j\le n}\delta(x_i-x_j)$$

で書ける事、また N 個の (同じ)1 次元粒子が δ 関数ポテンシャルで相互作用していて、かつ原点に (やはり δ 関数ポテンシャルに従う) 壁が存在する時の Hamiltonian は

$$H_1=\Delta+c_0\sum_{1\le i\le N}\delta(x_i)+c_1\sum_{1\le i<j\le N}\delta(x_i-x_j)$$

と書ける事が分かる。

さらに、ここで粒子状態の原点での壁に対する対称性 (Neumann 型の境界条件) を与えると対応する Hamiltonian は

$$H_{LM}=\Delta+c_0\sum_{1\le i\le n}\delta(x_i)+c_1\sum_{1\le i<j\le n}(\delta(x_i-x_j)+\delta(x_i+x_j))$$

となる。この Hamiltonian により制御される系を Lieb-McGuire 系と呼ぶ。

Lieb-McGuire 系に従う系は金属の境界付近における電子の分布として見られる。金属 (もしくは合金) を変える毎に様々なパラメタの Lieb-McGuire 系に従う電子の分布が観測できるが、これは結局 $c_0,c_1<0$ とい

う状況を表している。そして、現実的に観測されうる系は L^2 条件を満たす必要がある為このような系の L^2 解を分類する事には意味があると考えられる。

2 次数付き Hecke 環作用: A_1 型の場合

方程式 (1.1) で $N=1$ の場合に戻る。この時、$c=c_0$ とおくと 0 以外での (1.1) 解は $e^{\pm\sqrt{E}x}$ の重ね合わせで書ける。従って $x=0$ の近くで

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_+(x)=C_{++}e^{\sqrt{E}x}+C_{+-}e^{-\sqrt{E}x} & x>0\\ \psi_-(x)=C_{-+}e^{\sqrt{E}x}+C_{--}e^{-\sqrt{E}x} & x<0\end{cases}$$

のように書けるとしてよい。この時、ある正数 ϵ に対して $-\epsilon<x<\epsilon$ で $\psi(x)$ が (1.1) を満たす事は関数として well-defined である事

$$\lim_{x\downarrow 0}\psi(x)=C_{++}+C_{+-}=C_{-+}+C_{--}=\lim_{x\uparrow 0}\psi(x)$$

と $x\geq 0$ で方程式 (1.1) を満たす事

$$\begin{aligned}&-\frac{\sqrt{E}}{2}(C_{++}-C_{+-}-C_{-+}+C_{--})+\sqrt{-E}(C_{++}-C_{+-})\\&=\frac{\sqrt{E}}{2}(C_{++}-C_{+-}+C_{-+}-C_{--})\\&=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(\psi''(x)-E\psi(x))dx=-\int_{-\epsilon}^{\epsilon}c\delta(x)\psi(x)dx\\&=\frac{-c}{2}(C_{++}+C_{+-}-C_{-+}-C_{--})\end{aligned}\tag{2.1}$$

の両方を満たす事と同値である。この 2 つの連立方程式は常に $c\neq 0$ の時には常に線形独立なので、$x>0$ での解 $\psi_+(x)$ から $x<0$ での解 $\psi_-(x)$ は一意的に決まる。

さらに $\psi_+(x)$ が $x>0$ で L^2 解を定める事は (E が実数であるならば)$E<0$ かつ $C_{+-}=0$ である。またこの時さらに $\psi_-(x)$ が $x<0$ で L^2 解を定める為には $\sqrt{E}=-c$ が必要十分となる。結論をまとめると

Theorem 2.1. $N=1$ の時に方程式系 (1.1) の解 $\psi(x)$ は $x>0$ での解 $\psi_+(x)$ からの一意的延長として与えられる。また、(1.1) が二乗可積分解を持つ必要十分条件は $E<0$ であり、この時そのような解は ($c=c_0$ に関して) 唯一定まる。

さて、方程式系 (1.1) の $x > 0$ での解は Laplacian の固有関数であったので適当な指数関数 (の線形結合) である。さらに各固有値 E 毎に操作 $T : \psi_+(x) \mapsto \psi_-(x)$ が定まっていた。これの自然な延長である積分変換

$$T : C^\infty(\mathbb{R}) \ni f(x) \mapsto s + c\int_0^{2x} f(x-t)dt \in C^\infty(\mathbb{R})$$

を定める。ただし、ここで $sf(x) = f(-x)$ である。構成から容易に $T^2 = \mathrm{id}$ である事が見て取れる。この T を便宜上**接続作用素**と呼ぶ事にする。

すると、結局 $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間に T の作用が定まったと思える。言い換えると

Theorem 2.2. $\Delta\psi_+(x) = E\psi_+(x)$ を満たす $\psi_+ \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_+(x) & x > 0 \\ T\psi_+(x) & x < 0 \end{cases}$$

と定めると、$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数を定め

$$\Delta\psi(x) + c\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

を満たす。

Proof. 簡単な計算により $a \neq 0$ に対して

$$Te^{ax} = \frac{a-c}{a}e^{-ax} + \frac{c}{a}e^{ax}$$

が成立することが分かるので、

$$\lim_{x\to 0}\psi_+(x) = \lim_{x\to 0}T\psi_+(x)$$

が従う。また、(2.1) において $a = \sqrt{E}$ とおいた式を満たすことも容易に分かる。 □

この状況下において $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$ と T によって生成される $C^\infty(\mathbb{R})$ に作用する代数系 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ を考える事ができる。ここで、唯一の非自明な交換関係は

$$T\xi + \xi T = T\xi - (-\xi)T = 2c \in \mathrm{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$$

によって与えられている。この関係式は結局 $\mathcal{H}_c$ は $\mathsf{A}_1^{(1)}$ 型の graded Hecke 環である事を主張している[1]。また、$\Delta \in \mathcal{H}$ は中心 $Z(\mathcal{H})$ を生成している。

さて、$\psi(x)$ 自身はアプリオリには $C^\infty(\mathbb{R})$ には属さない。しかし、例えば T の作用をさらに $x \to -x$ で捻ってやると、$\psi_+(x)$ が Lieb-McGuire 系の二乗可積分解を定めるための必要条件は

$$\psi_+(x) = (T\psi_+)(-x)$$

であることが分かる。また、さらに十分条件にするためには

$$\psi_+(x) = Ce^{ax} \text{ for some } a \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \Re a < 0$$

が必要で、この事は $\psi_+(x)$ を ξ-固有成分に分解したときに制限が付く事を意味している。実はこの制限はまさに $\mathcal{H}_c\psi_+(x)$ が離散系列表現を定める事と同値になっている。すなわち

Theorem 2.3 (Heckman-Opdam). $c > 0$ とする。この時 *Lieb-McGuire* 系の二乗可積分解は $\mathcal{H}_c$ の離散系列表現 L であり $\mathfrak{S}_2$ の符号表現を含むものと 1 対 1 に対応する。

3 次数付き Hecke 環作用: 一般の場合

上記の考察を今度は一般の $N \geq 2$ に対して行う。$V = \mathbb{R}^N$、$V_\mathbb{C} := \mathbb{C}\otimes_\mathbb{R} V$ とおく。BC_N 型の Weyl 群を $W_N = \mathfrak{S}_N \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ と置き、その単純鏡映の集合を $S = \{s_i\}_{i=1}^n$、$\mathbb{R}^N$ における開基本領域を

$$D_1 := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^k x_i \geq 0 \text{ for each } k\},$$

そして各 $w \in W_N$ に対して $D_w := w.D_1$ とおく。この時、各 $s_i \in S$ に対して各 D_w 上の (1.1) 解 $\psi_w(x)$ に対して D_{s_iw} 上の (1.1) の解 $\psi_{s_iw}(x)$ であって

$$\widetilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi_w(x) & x \in D_w \\ \psi_{s_iw}(x) & x \in D_{s_iw} \end{cases}$$

[1]接続作用素 T は Yang や Gutkin の仕事で既に現れている。Heckmann-Opdam の主要な発見は微分作用素を考え合わせると affine Hecke 環 (の変種) が実現されている事に気付いた事にある。

が $\overline{D_w \cup D_{s_i w}}$ の内点上の (1.1) の連続解に延びる様なものが一意的に存在する。ここで $\psi_w(x), \psi_{s_i w}(x)$ ともに $\mathbb{R}^N$ 全体で定義されている (通常は) 異なる関数であり、$T_i : \psi_w(x) \mapsto \psi_{s_i w}(x)$ は写像

$$T_i : C^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

を誘導する。結局 $\Delta\psi_1(x) = E\psi_1(x)$ を満たすような任意の C^∞ 関数 $\psi_1(x)$ に対して

$$\widetilde{\psi}(x) \mid_{D_w} := T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_\ell} \psi_1(x)$$

と定めると、これは (1.1) の V 上での連続解を定める事が分かる。ただし、$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell}$ は W_N の元 w の最短表示である。

Theorem 3.1 (Heckman-Opdam)**.** 各 $1 \leq i \leq N$ に対して $T_i^2 = \mathrm{id}$ が成立し、$T_1, \ldots, T_N$ は W_N の $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ への作用を定める。さらに、$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \in V$ 達の作用と W_N の作用は

$$T_i \xi_j - (s_i \xi_j) T_i = \begin{cases} c_0 \xi_n & (i = n = j) \\ c_1 \xi_i & (1 \leq i = j < n) \\ c_1 \xi_j & (0 \leq i + 1 = j < n) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

という交換関係を満たし[2]、BC_N 型の *graded Hecke* 環 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_N(c_0, c_1)$ の作用を $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ へと定める。

この錨像の元で各 (1.1) の解は $\mathcal{H}$-表現を生成する。$\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ をその可換な部分代数として含む為各既約 $\mathcal{H}$ 加群 L と代数準同型 $\chi : \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_N] \to \mathbb{C}$ に対して

$$L[\chi] := \{x \in L \mid (f - \chi(f))^{\dim L} x = 0 \text{ for all } f \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_N]\}$$

と定めると、$L = \bigoplus_\chi L[\chi]$ となる事が分かる。$L[\chi] \neq \{0\}$ である時に χ を L のウェイトと呼ぶ。ここで、χ は $(\mathbb{C}^N)^* \cong \mathbb{C}^N$(要するに $x_1, \ldots, x_N$ を座標とする平面の双対ベクトル空間) の点と思う事ができるが、これが特に $\mathbb{R}^N$ に属する時に実ウェイトと呼ぶ。L のウェイト全体の集合を $\Psi(L)$ とおき、さらに任意の $\chi \in \Psi(L)$ が実ウェイトな時に L は実中心指標を持つという。

[2] ここで $\xi_1, \ldots, \xi_N$ への W_N の作用は $x_1, \ldots, x_N$ の作用の双対から自然に入っている。

Definition 3.2 ((反) 球型離散系列)**.** $\mathcal{H}$ の既約表現 L が離散系列表現であるとは任意の $\chi \in \Psi(L)$ と $1 \leq j \leq n$ に対して

$$\langle \chi, \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_j \rangle \leq 0$$

が成立する事と定める。また、L が反球型であるとは

$$\mathrm{Hom}_{W_N}(\mathsf{sgn}, L) \neq \{0\}$$

となる事である。(同様に球型を sgn を triv に変えて定義する。)

Theorem 3.3 (Heckman-Opdam)**.** 結合定数 $c_0, c_1 > 0$ となる *Lieb-McGuire* 系の二乗可積分解は $\mathcal{H}(c_0, c_1)$ の反球型離散系列表現 L と 1 対 1 対応する。

Remark 3.4. $\mathcal{H}(c_0, c_1)$ の中心は $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi]^{W_N}$ であるので、既約 $\mathcal{H}$ 加群 L に対して中心指標 $\psi_L : \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi]^{W_N} \to \mathbb{C}$ が定まる。この時、L が反球型であるときに対応する系 (1.1) の解に対して $E = \psi_L(\Delta)$ が成立する。

4 BC 型 affine Hecke 環の (反) 球型離散系列表現

BC_N 型 affine Hecke 環 $\mathbb{H}$ は (2 つではなく)3 つのパラメタ $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ を持つ $N+1$ 個の元 $T_0, T_1, \ldots, T_N$ で生成される代数系で、その定義関係式は以下で与えられる:

- $T_iT_j = T_jT_i$ $|i-j| > 1$ かつ $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$ が $1 \leq i < n-1$ が成立;
- $(T_0T_1)^2 = (T_1T_0)^2$ かつ $(T_{N-1}T_N)^2 = (T_NT_{N-1})^2$;
- $(T_0+1)(T_0+\mathbf{q}_0/\mathbf{q}_1) = 0 = (T_N+1)(T_N+\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1)$;
- $(T_i+1)(T_i-\mathbf{q}_2) = 0$ が $1 \leq i < n$ に対して成立。

この時、Lusztig [Lu89] によるとパラメタ $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ の $\mathbf{BC}_N$ 型次数付き Hecke 環の実中心指標を持つ既約表現はパラメタを $\mathbf{q}_0 = -1, \mathbf{q}_1 = q^{c_0}, \mathbf{q}_2 = q^{c_1}$ と (ある $q > 1$ を用いて)$\mathbb{H}$ を特殊化した代数の (対応する中心指標を持つ) 既約加群と 1 対 1 に対応する。したがって対応する条件を満たす様な $\mathbb{H}$ の表現を分類すれば Lieb-McGure 系の二乗可積分解が分類できたことになる。

そこで、対応する我々の対応を思い出すことにしよう。$G = Sp(2n, \mathbb{C})$ とする。この時ベクトル表現 $V_1 = \mathbb{C}^{2n}$ とその 2 回ウェッジ積 $V_2 = \wedge^2 V_1$ を取り、その直和 $\mathbb{V} := V_1 \oplus V_2$ を考える。T を G の極大トーラスとして、$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ を T の指標群 $X(T)$ の基底であって (G, T) に関するルート系 R とその正ルート系 R^+ が

$$R = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{\pm 2\epsilon_i\}_{i=1}^n \supset R^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{2\epsilon_i\}_{i=1}^n$$

によって与えられるものを取る。その時 $\mathbb{V}^+$ で $\mathbb{V}$ のウェイトが $\{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ に属するような T-固有空間の直和とすると、R^+ に対応する T を含む G の Borel 部分群 B は $\mathbb{V}^+$ を保つ事が分かる。従って $\mathcal{B}$ の B 上のファイバーが $\mathbb{V}^+$ で与えられる G-同変ベクトル束 $F := G \times^B \mathbb{V}^+$ を考える事ができる。

すると、次の写像を考える事ができる

$$F = G \times^B \mathbb{V}^+ \hookrightarrow G \times^B \mathbb{V} \cong \mathcal{B} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}.$$

この合成射を μ で表し、またその像を $\mathfrak{N}$ で表す。$\mathfrak{N}$ は $\mathbb{V}$ の Hilbert 冪零錐である事が知られている。各 $x \in \mathfrak{N}$ に対して $\mathcal{E}_x$ を $\mu^{-1}(x)$ の $\mathcal{B}$ への射影として定める。

さて、$\mathcal{H}$ の実中心指標 ψ に対して ψ の固有値を (先ほどと同じ $q > 1$ に関する) 指数に置き換えて $Sp(2n, \mathbb{C})$ の半単純共役類が得られる。この時、その半単純共役類から元 s を取ると

$$sx = \vec{q}x \text{ ただし } \vec{q}x = (q^{c_0}x_1, q^{c_1}x_2) \in \mathbb{V}$$

が成立する時には

$$M_{(s,x)} := H^\bullet(\mathcal{E}_x) := \bigoplus_{i \geq 0} H^{2i}(\mathcal{E}_x)$$

には $\mathbb{H}$ の作用を通して $\mathcal{H}$ の表現の構造が入る事が知られている [Ka09a]。(この $M_{(s,x)}$ の事を eDL 標準加群と呼ぶ。) そして、

$$\mathbb{V}^a = \mathfrak{N}^a := \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{N} \mid q^{c_0}x_1 \oplus q^{c_1}x_2 = s(x_1 \oplus x_2)\}$$

とおくと

Theorem 4.1 (eDL 対応 [Ka09a] §9). $q > 1$ と仮定する。この時に $\mathbb{V}^a$ の $Z_G(s)$-軌道は有限であり

$$Z_G(s) \backslash \mathbb{V}^a \ni x \mapsto L_{(s,x)} \in \mathsf{Irrep}\mathbb{H}_s$$

は1対1対応を与える。(ただし $\mathbb{H}_s$ は中心指標 ψ に対応する $\mathbb{H}$ の有限次元商。) さらに、$L_{(s,x)}$ は $M_{(s,x)}$ の商加群として書ける。

eDL 標準加群を $W_N \subset \mathcal{H}$ に制限すると、これは各次数部分 $H_{2i}(\mathcal{E}_x)$ を保ち、さらに任意の $x \in \mathfrak{N}$ に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{W_N}(\mathsf{sgn}, H^0(\mathcal{E}_x)) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

が成立する事が知られている ([Ka09a] §8)。さらに中心指標を決めた時に既約表現の中で sgn を含むものは x が $\mathbb{V}^a$ の開 $Z_G(s)$ 軌道を与える場合のみである事も Ginzburg による一般論 ([CG97] §8) を援用して簡単に分かる (c.f. [EM97, CK09])。

従って残る問題は $\mathbb{V}^a$ の $Z_G(s)$-軌道がいつ離散系列表現を与えるのかを決定する事であるが、それが [CK09] の主定理であった。簡単の為結論を述べる前に状況を制限して

$$(\star) \quad c_0 \neq mc_1 \text{ が } m = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, n-1 \text{ に対して成立}$$

しているとする[3]。

Theorem 4.2 (Opdam [Op04] + Ciubotaru-K [CK09])**.** 条件 $(\star)$ の元で $\mathcal{H} = \mathcal{H}(-c_0, -c_1)$ の実中心指標を持つ離散系列表現と N の分割は1対1に対応する。さらに、各 N の分割に対して $s = s_\sigma$ と $\mathbb{V}^a$ の $Z_G(s)$-軌道を記述する具体的なアルゴリズムが存在する。

N の分割 σ を $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\le 0}$ の $(0,0)$ を含む Young 図形と同一視し、

$$c : \mathbb{Z}^2 \ni (i,j) \mapsto c_0 + (i-j)c_1 \in \mathbb{R}$$

と置く。

Corollary 4.3 (Ciubotaru-K [CK09])**.** 上の定理の設定で N の分割 σ が反球型である (すなわち開 $Z_G(s)$ 軌道を与える) ための必要十分条件は σ の $i \ge -j$ を満たす *hook* の右端の c の値を $a_1 > a_2 > \cdots$ とおき、$i < -j$ を満たす *hook* の下端の c の値を $b_1 < b_2 < \cdots$ とするとき

$$a_1 > -b_1 > a_2 > -b_2 > \cdots > 0$$

が成立する事である。

[3]成立している場合は我々の議論と [OS09b] の議論を組み合わせる事で記述が得られる

Remark 4.4. この系は例えば $c_0 = c_1$ の時には Kazhdan-Lusztig [KL87] の議論から従う。

謝辞: ここに書かれた (我々の結果に関する) 共同研究者である Dan Ciubotaru 氏に感謝します。また、締め切りが重なってしまい迷惑をかけた別の研究に関する共同研究者の方々とこの編集責任者の荒川知幸氏にお詫び申し上げます。

参考文献

[CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, Representation theory and complex geometry. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. x+495 pp. ISBN 0-8176-3792-3.

[CK09] Dan Ciubotaru and Syu Kato, Tempered modules in the exotic Deligne-Langlands classification, preprint.

[EM97] Sam Evens and Ivan Mirkovic, Fourier Transform and Iwahori-Matsumoto involution, Duke Math., vol. 86 (1997), no. 3, 435–464.

[HO97] Gerd Heckman and Eric Opdam, Yang's system of particles and affine Hecke algebras, Ann. of Math. (2) 145 (1997) no.1 139-173 Erratum: Vol. 146, No. 3 749-750 (1997)

[Ka09a] Syu Kato, An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups, Duke Math. J. 148 (2009), no. 2, 305–371.

[Ka09b] Syu Kato, Deformations of nilpotent cones and Springer correspondences, to appear in Amer. J. Math.

[KL87] David Kazhdan and George Lusztig, Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, Invent. Math. 87 (1987), no. 1, 153–215.

[Lu89] George Lusztig, Affine Hecke algebras and their graded version, J. Amer. Math. Soc. **2**, (1989), no.3, 599–635.

[Op04] Eric Opdam, On the spectral decomposition of affine Hecke algebras, J. Inst. Math. Jussieu **3**(4) (2004), 531–648.

[OS09b] Eric Opdam and Maarten Solleveld, Discrete series characters for affine Hecke algebras and their formal degrees, to appear in Acta Math.