1　弦理論とフレーアーホモロジー

量子コホモロジー環とは超弦理論における相互作用の大きさを表す。このことを説明するためここではまずフレーアーホモロジーと超弦理論の関係について思い出そう。この節の記述は次節以後の記述のための動機付けに過ぎない。後で必要になるわけではないし，物理的に正確な記述ではない。

(M,ω)をシンプレクティック多様体としその上にこれと整合的な概複素構造Jとそれから定まるリーマン計量g_Jを考える。すなわち$g_J(u,v)=\omega(Ju,v)$である。（小野氏の項参照，そこではJはω-calibratedと呼ばれていた。）弦理論ではM上を運動するS^1を考える。すなわち粒子のある時刻における状態はMのループ空間$\Omega M=\left\{\ell : S^1 \to M\right\}$上の点であると考える。弦の運動は次の方程式で支配されているとしよう。

（1.1）
$$\frac{\partial \ell_t}{\partial t}=-J\frac{\partial \ell_t}{\partial s}$$

ただし$t\mapsto \ell_t$はΩM内の曲線である。（この方程式を超対称性を持つシグマモデルの一つ（位相的シグマモデル）としてあるラグランジアンからオイラーラグランジュ方程式として導くことがウィッテンにより[W3]でなされている。）方程式（1.1）はつぎのように解釈される。$\varphi:\boldsymbol{R}\times S^1\to M$を$\varphi(t,s)=\ell_t(s)$とおく。$\boldsymbol{R}\times S^1$は$(t,s)\mapsto e^{t+\sqrt{-1}s}$で$\boldsymbol{C}-\{0\}$と同一視し複素構造を入れる。このとき

補題1.2　方程式（1.1）は$D\varphi\circ J=J\circ D\varphi$と同値である。❑

これはほとんど明らかであろう。こうして（1.1）による弦の運動が，$\boldsymbol{C}-\{0\}$から(M,J)への正則写像（概複素曲線）を考えることと同一視された。

この様な弦が非常に多くありそれらがお互いに独立である（相互作用しない）系を考えよう。このとき次の標語が成り立つ：

「主張1.3」　この系のオブザーバブル（Observable）全体はMのコホモロジーである。（あるいはフレーアーコホモロジーといっても「よい」シンプレクティック多様体では同じである。小野氏の項参照。）❑

オブザーバブル（観測量）という言葉はもう少し後で説明する。さてこの主張を説明するために次のような仮説を置く。

仮説1.4　弦はきわめて微細でまたその変化は早く起こるので，我々は定常状態しか観測

することが出来ない。❑

方程式（1.1）で支配される弦の運動の定常状態とは何であろうか？むろんこれは $\frac{d\ell}{ds}=0$ であるような ΩM の弦すなわち定値曲線である。これはそのまま考えるには少し都合が悪い。というのは定値曲線全体は M の次元ぶんだけあってしたがって定常状態が無限個あることになる。（場の理論としては定常状態が無限個あってもいっこうにかまわない。しかし位相的場の理論であるには非可算無限個あるのはまずい。）これは方程式（1.3）の定常解が横断正則性を満たしていないせいである。（この点については６節でもう一度述べる。）この点を解決するために方程式（1.1）に摂動を加える。すなわち M 上のモース関数 f を選んで

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial t}(s) = -J\frac{\partial \ell_t}{\partial s}(s) - \mathrm{grad}_{\ell_t(s)} f \tag{1.5}$$

なる方程式を（1.1）のかわりに用いる。（ここでは f は s によらない場合を考えたが，これが s により即ち $f : S^1 \times M \to \boldsymbol{R}$ なる関数である場合も考えることが出来る。このとき（1.5）のかわりに，

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial t}(s) = -J\frac{\partial \ell_t}{\partial s}(s) - \mathrm{grad}_{\ell_t(s)} f(s,\cdot) \tag{1.6}$$

なる方程式を考える。アーノルド予想に関わるのはこの場合である。）

（1.5）の定常解は

$$\frac{\partial \ell}{\partial s}(s) = -\mathrm{grad}_{\ell(s)} f \tag{1.7}$$

で与えられる。すなわち勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}\ f$ の積分曲線である。ただしこれは $\ell(s+2\pi)=\ell(s)$ を満たさなければならない。こういうものは定値曲線 $\ell(s)\equiv p$ 以外にはない。また p で $-\mathrm{grad}\ f$ は０でなければならない。即ち定常状態は

$$Cr(f) = \{p \in M \mid \mathrm{grad}_p f = 0\}$$

すなわち f の臨界点に１対１に対応する。（（1.6）の定常解は $f : S^1 \times M \to \boldsymbol{R}$ から定まる周期ハミルトン系の周期解である。）

さてここでオブザーバブルという言葉を説明しよう。これはその系から観測されうる量全体を指す。例えば１点だけがある系であると，その点の位置と速度がオブザーバブルになる。

我々の系の場合，定常状態は $Cr(f)$ で表された。したがって仮説1.4より，系の状態はそれぞれの定常状態に対してその状態にある弦の数を与えれば定まる。弦の数は非常に多

いとしていたからこの数は実数であるとしてしまおう。結局系の状態は$Cr(f)$の元に実数を与える対応である。（弦の数が負とはどう考えるか？それでいいかよくわからないが反粒子を考えるとしておきましょう。）

以上の記述のままだとオブザーバブルはその双対で$Cr(f)$の元達を基底にしたベクトル空間になる。小野氏の項を参照していただければこれはフレーアーのコチェイン複体である。（あるいはウィッテン複体の双対である。）これではコホモロジーを取らなければ主張1.5にならない。この点は次のように説明される。

以上は古典論であるが我々は古典論ではなく量子論まで考える。するとトンネル効果と呼ばれる現象がある。すなわち，ある点$p \in Cr(f)$に対応する定常状態にある粒子から出発しよう。古典的にはこの状態は定常状態であるから変わることはない。しかし量子論では常に揺らぎが起こっていてこの粒子は少しその状態が変わる。もしこの状態が漸近的に安定ならば，すなわちこれpに近い状態から出発した方程式（1.5）の解が全て時刻$_\infty$でpに収束するならば，このことは忘れてもよい。しかし我々の場合はそうではない。一般にはpから少し揺らいだ初期条件から出発すると（1.5）に沿ってそれが変化して違った定常状態に落ちつくことがある。これをトンネル効果という。これに対して次の仮説をたてる。（ℓ_1とpがなにかごっちゃになっているが，ℓ_1の方を使うとハミルトニアンがS^1ファクターによる場合も出来るのであえてごっちゃにした。

仮説1.8： ℓ_1**なる状態が**ℓ_2**なる状態に変化するトンネル効果の起こる割合は（1.5）の**$t \to -\infty$**では**ℓ_1**に**$t \to \infty$**では**ℓ_2**に収束する「解の数」に比例する。** ❑

この仮説にもとずき

$$\mathcal{M}(p,q) = \left\{ t \mapsto \ell_t \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell_t \in \Omega M,\ \ \ell_t \text{ satisfies (1.5)} \\ \lim\limits_{t\to-\infty} \ell_t(s) = p,\ \ \lim\limits_{t\to+\infty} \ell_t(s) = q \end{array} \right\} \tag{1.9}$$

と定義する。上の仮説はトンネル効果が$\mathcal{M}(p,q)$の位数に比例することを主張する。本当はこれは２つの点で修正しなければならない。第一に我々が問題にすべきなのは$\mathcal{M}(p,q)$の位数ではなくその符合付きの位数である。第二にp,qの組の取り方によっては$\mathcal{M}(p,q)$が次元をもつ場合がある。一般に$\mathcal{M}(p,q)$の次元は$\eta(p)-\eta(q)$である。（ただしパラメーターの取り替え$\ell(\cdot) \mapsto \ell(\cdot + t_0)$で移りあうものを同一視すると$\eta(p)-\eta(q)-1$次元である。）ここで$\eta(p)$は$p$のモース指数つまりヘッシアンの負の固有値の数。この次元の式は$\mathcal{M}(p,q)$がpの安定多様体とqの不安定多様体の交わりと思えば証明できる。そこで次のように仮説を修正する。

仮説1.10： $p \in Cr(f)$ **なる状態が** $q \in Cr(f)$**なる状態に変化するトンネル効果の起こる割合は**$\eta(p)-\eta(q)$**が１の時の符号付きの位数，そうでなければ０である。** ❑

こう修正してよい根拠はここの記述からでは余りはっきりしないであろう。ウィッテ

ンの論文[W1]のトンネル効果の関わる節の記述と比べればもう少しはっきりするであろう。（[W1]ではド・ラームコホモロジーの言葉で述べてあるが。）

さてこの仮説1.4と1.10をもとにトンネル効果を考慮に入れた場合オブザーバブルがなにになるか考えてみよう。まずウィッテン複体を

（1.11）
$$C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}) = \bigoplus_{p \in Cr(f)} \boldsymbol{R}[p]$$

で定義する。前に述べたのはトンネル効果を忘れた定常状態は$C((M,\omega), f;\boldsymbol{R})$の元で表されるということであった。また（トンネル効果を忘れると，オブザーバブルは$Hom(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R})$の元で与えられる。）$C((M,\omega), f;\boldsymbol{R})$から自分自身への準同型$\partial$を

（1.12）
$$\partial[p] = \sum_{\eta(p)=\eta(q)+1} \#\mathcal{M}(p,q)[q]$$

と定める。

さて我々の考えている系では弦の状態の変化は観測にかかる時間に比べて非常に早く起こるとしていた。仮説1.11によればある瞬間に系の状態が$x \in C((M,\omega), f;\boldsymbol{R})$で与えられたとすると，時間$t$ではそれは$x + Ct\partial x$で与えられるであろう。さて$c \in Hom(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R})$とする。もし$c(x)$と$c(x+Ct\partial x)$が異なっていれば時間が経つにつれて観測値$c(x+Ct\partial x)$はどんどん変わってしまう。したがって，弦の状態の変化は観測にかかる時間に比べて非常に早く起こると仮定したから，この値は早く変わってしまって観測できないであろう。すなわちトンネル効果を考えてもcがオブザーバブルであるためには$c(\partial x) = 0$即ちcはコサイクルでなければならない。

次にある状態$x \in C((M,\omega), f;\boldsymbol{R})$があったときこれがトンネル効果を考えても安定であるのはどういう場合であるか考える。するとこれは$x + Ct\partial x \equiv x$である場合，つまり$\partial x = 0$の場合すなわち$x$がサイクルの場合である。そうでなければ$x$はトンネル効果でどんどん変わってしまい，そういう状態は残らないと考える。したがって実際に残っている状態はサイクルだけであるとする。したがってもし$c \in Hom(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R})$がコバウンダリーであるとするとつまり$c(x) = c'(\partial x)$なる$c'$があるとすると，実際に残っている状態即ちサイクル上ではcの値は常に0である。すなわちコバウンダリーであるようなcはオブザーバブルとしては0であると解釈できる。

以上の議論よりオブザーバブル全体の作るベクトル空間は

（1.13）
$$\frac{\{x \in Hom(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}) \mid \delta x = 0\}}{\{\delta x \mid x \in Hom(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R})\}}$$

である。

ところで$\partial\partial = 0$であった（小野氏の項参照。）したがってウィッテン複体$(C((M,\omega), f;\boldsymbol{R}),\partial)$はチェイン複対で，（1.13）はその双対であるコチェイン複体のコホモロジーである。すなわちオブザーバル全体はウィッテン複体のコホモロジーと一致する。

さらにウィッテン複体のコホモロジーは多様体自身のコホモロジーと一致する（小野

氏の項参照。）結局主張1.3が成立することになる。

以上の議論はＢＲＳＴ量子化と呼ばれるものの説明を単純化してしたつもりであるが，話を単純化しすぎていてよく考えると数学的にも物理的にもおかしいところがいっぱいある。数学的におかしい点については小野氏の項をごらん頂きたい。また後の節でも訂正する。物理的におかしいところを直すのは筆者には出来ないので，物理学者におまかせすることにしたい。

2　フレーアーホモロジーの積構造

まっとうな数学を始める前に，いかがわしい話をもう少し続けさせていただきたい。前の節の始めで，量子コホモロジー環とは超弦理論における相互作用の大きさのことである，と述べた。このことをもう少し説明しよう。前節の記述では弦は非常に多くあるとしたが，それらはお互いに独立で相互作用を起こさないとした。これでは余り面白い理論にはならない。そこでこの節では相互作用を考えよう。ついでにいうと超弦理論の優れている点の一つは相互作用が個々の粒子の運動法則と独立に（つまり無関係に後から）与えられるのでなく，個々の粒子の運動法則のいわば自然な一般化として与えられる点であるという。

さて場の量子論での相互作用はいくつかの粒子がぶつかって違った種類の粒子に変化することで起こる。粒子がぶつかっていく様子を絵に書けば下の図のようになるであろう。

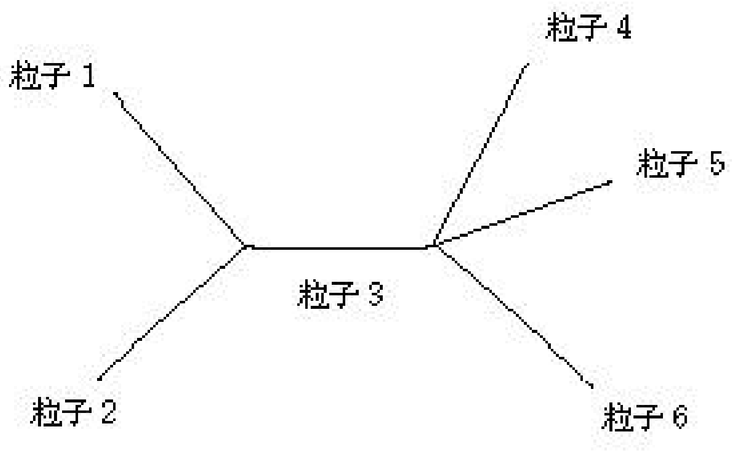

図2.1：　相互作用

このての図をファインマン図式といった。図2.1では粒子は点であると考えた。図2.1の扱いずらい点はこの図形に特異点があることである。（即ちグラフは自明なもの以外は多様体ではない点である。）弦理論では対応する相互作用は次の図のようになる。

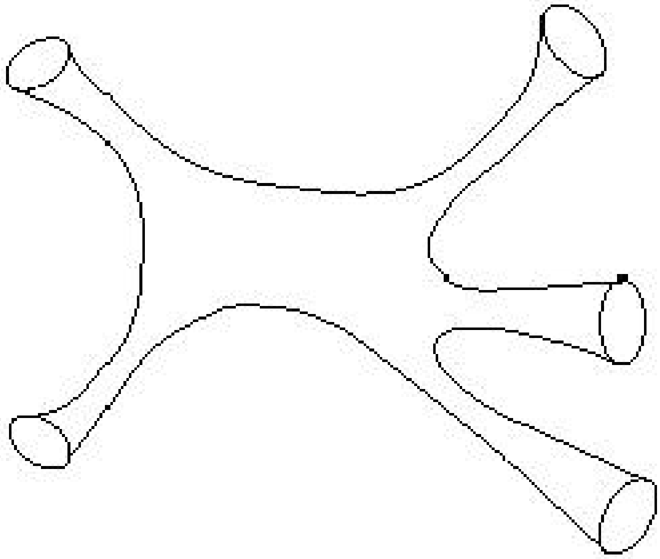

図2.2：　ストリング理論における粒子の相互作用

　これが数学としてどのようなことを意味するか述べよう。上では２つの粒子が相互作用して３つの粒子になっているが，ここでは一番簡単な場合つまり２つの粒子が相互作用して第３の粒子になるプロセスを考えよう。リーマン球面$\boldsymbol{C}P^1 = S^2$からその上の３点$0,1,\infty$を除いたものを考える。$\boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\}$からコンパクト集合$K$を除き$\boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\} - K$と$(-\infty,0)\times S^1$ ２つと$(0,\infty)\times S^1$のdisjoint unionとの間の複素同型を選んでおく。（ただし$(-\infty,0)\times S^1$には$(t,s)\mapsto e^{t+\sqrt{-1}s}$を用いて複素構造を定める。）$(-\infty,0)\times S^1$は$0,1$と対応し$(0,\infty)\times S^1$は$\infty$と対応するとしよう。これらに対応する$\boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\} - K$の連結成分をそれぞれ$T_0$，$T_1$，$T_\infty$で表す。このとき$\ell_0 \in \Omega M$と$\ell_1 \in \Omega M$が相互作用して$\ell_\infty \in \Omega M$になる遷移確率は，きわめて荒くいえば，次の空間の位数に比例するとする。

$$\mathcal{M}(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty) = \left\{ \varphi : \boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\} \to M \,\middle|\, \begin{array}{l} D\varphi \circ J = J \circ D\varphi, \\ \lim_{t\to-\infty} \varphi(t,s) = \ell_0(s) \ \text{ on } T_0 \\ \lim_{t\to-\infty} \varphi(t,s) = \ell_1(s) \ \text{ on } T_1 \\ \lim_{t\to\infty} \varphi(t,s) = \ell_\infty(s) \ \text{ on } T_\infty \end{array} \right\} \tag{2.3誤}$$

　実はこの書き方は間違いである。なぜなら例えば$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t,s) = \ell_0(s)$ on T_0となるためにはℓ_0は方程式（1.1）の定常解でなければならないがそれは定値曲線だけだから。これはやはり（1.1）の定常解（定値曲線）が退化しているせいである。正しくは（1.1）を摂動しなければならない。（1.5）と同様にこれは次のようにして行う。f_0, f_1, f_∞なる３つの

モース関数を取る。$\ell_0 \in \Omega M$を（1.5）の定常解とする。すなわち$\ell_0 \equiv p_0$，$p_0 \in Cr(f_0)$とする。ℓ_1, ℓ_∞も同様としよう。方程式の方もずらしてT_0, T_1, T_∞でそれぞれf_0, f_1, f_∞を用いて（1.6）のように方程式をずらしさなければばならない。これは次のようにして行う。$\chi : \boldsymbol{R} \to [0,1]$を無限階微分可能関数で

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-1,1] \\ 1 & |t| > 2 \end{cases}$$

を満たすとしよう。$\varphi : \boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\} \to M$ に対して方程式

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} D\varphi \circ J = J \circ D\varphi & \text{on } K \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = -J\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi(t)\operatorname{grad}_\varphi f_\alpha & \text{on } T_\alpha \end{cases}$$

を考えよう。ただしここでαは$0,1,\infty$のどれかを表しまたT_αは$(-\infty,0)\times S^1$または$(0,\infty)\times S^1$と同一視した。これで（2.3誤）を正しい定義に直せる。

$$\text{(2.3)} \qquad \mathcal{M}(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty) = \left\{ \varphi : \boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\} \to M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ satisfies (2.4)} \\ \lim_{t\to-\infty} \varphi(t,s) = \ell_0(s) \text{ on } T_0 \\ \lim_{t\to-\infty} \varphi(t,s) = \ell_1(s) \text{ on } T_1 \\ \lim_{t\to\infty} \varphi(t,s) = \ell_\infty(s) \text{ on } T_\infty \end{array} \right\}$$

これでも実は少し問題がある。それはノビコフ環がフレーアーホモロジーには必要なせいである。その辺を考えるためもう少し議論を精密にしよう。小野氏の項にしたがってノビコフ環をつぎのように定義しよう。まず$\phi_\omega : \pi_2(M) \to \boldsymbol{R}$，$\phi_{c^1} : \pi_2(M) \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれシンプレクテッィック系型式ωと(TM, J)のチャーン類c^1を使って

$$\phi_\omega(\varphi) = \int_{S^2} \varphi^* \omega$$

$$\phi_{c^1}(\varphi) = \int_{S^2} \varphi^* c^1$$

で定め，これを使って

$$\Lambda = \frac{\pi_2(M)}{\ker \phi_{c^2} \cap \ker \phi_\omega}$$

と定義する。

さらにΛ_ωは$\sum_{A\in\Lambda}\lambda_A\delta_A$なる形の無限和で，任意の$C$に対して$\phi_\omega(A)<C$かつ$\lambda_A\neq 0$ものが有限個であるもの全体を指す。$(M,\omega)$がWeakly monotoneであるシンプレクティック多様体である時（Weakly monotoneの定義は小野氏の項参照）Λ_ωを係数環にしたフレーアーホモロジーが定義され，MのΛ_ω係数のホモロジーと一致するのであった。このフレーアーホモロジーを定めるチェイン複体は

$$C((M,\omega),f;\boldsymbol{R})=\bigoplus_{p\in Cr(f)}\Lambda_\omega[p]$$

であった。また境界作用素は次の空間を使って定義されていた。

$$\mathcal{M}_A(p,q)=\left\{t\mapsto\ell_t\;\middle|\;\begin{array}{l}\ell_t\in\Omega M,\ \ \ell_t \text{ satisfies (1.5)}\\ \lim\limits_{t\to-\infty}\ell_t(s)=p,\ \ \lim\limits_{t\to+\infty}\ell_t(s)=q\\ (s,t)\mapsto\ell_t(s)\text{ represents an element of }A\end{array}\right\}$$

この集合$\mathcal{M}_A(p,q)$をパラメーターのずらし$\ell(\cdot)\mapsto\ell(\cdot+t_0)$の定める$\boldsymbol{R}$作用で割った空間を$\overline{\mathcal{M}}_A(p,q)$とおく。（$\partial p=\sum_{A,q}\#\overline{\mathcal{M}}_A(p,q)\delta_A q$であった。）

さてたまたま我々の場合は（1.5）の定常解は定値曲線だけであったから，（2.3）の元は$\pi_2(M)$の元を定める。（基点の取り方の問題があるが技術的な議論で問題ないことがわかりあまり重要でない。特に我々の今の状況では（2.3）の元が$\Lambda=\dfrac{\pi_2(M)}{\ker\phi_{c^2}\cap\ker\phi_\omega}$の元を定めることだけが大切である。）さて$A\in\Lambda$に対して

$$\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)=\left\{\varphi:\boldsymbol{C}P^1-\{0,1,\infty\}\to M\;\middle|\;\begin{array}{l}\varphi\ \text{ satisfies (2.4)}\\ \lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t,s)=\ell_0(s)\ \text{ on }T_0\\ \lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t,s)=\ell_1(s)\ \text{ on }T_1\\ \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,s)=\ell_\infty(s)\ \text{ on }T_\infty\\ [\varphi]=A\end{array}\right\}\tag{2.5}$$

とおく。このモデュライ空間について必要な性質を列挙しよう。(M,ω)をWeakly monotoneであるシンプレクティック多様体とする。

定理2.6　genericな概複素構造とモース関数f_0,f_1,f_∞に対して，$\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$は向きの付

いた微分可能多様体でその次元は$\dim \mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)=\eta(p_0)+\eta(p_1)-\eta(p_\infty)+2\phi_{c^1}(A)-\dim M$**である。**❑

定理2.7　任意の正の数C**に対して集合と**$\ell_0,\ell_1;\ell_\infty$**に対して集合**

$$\bigcup_{\substack{2\phi_{c^1}(A)=\eta(p_\infty)-\eta(p_0)-\eta(p_1)+\dim M\\ \phi_\omega(A)\le C}} \mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$$

は有限集合である。❑

定理2.8　$\eta(p_0)+\eta(p_1)-\eta(p_\infty)+2\phi_{c^1}(A)-\dim M=1$**とすると，**$\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$**は向きの付いた１次元多様体であるがこれはコンパクトな１次元多様体**$C\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$**の内部と可微分同相でまた**$C\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)-\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$**は次の３つの空間の和と向きの付いた（０次元）多様体として可微分同相である。**

$$\bigcup_{B\in\Lambda}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_0,\ell_0')\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_0',\ell_1,\ell_\infty)$$
$$\bigcup_{B\in\Lambda}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_1,\ell_1')\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_0,\ell_1',\ell_\infty)$$
$$\bigcup_{B\in\Lambda}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_\infty',\ell_\infty)\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_0,\ell_1,\ell_\infty')$$ ❑

定理の証明については少しだけ注意する。

定理2.6について。$A=0$のとき$\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$はすっかり痩せた集合で実は$p_0$についてのgrad f_0の安定多様体とp_1についてのgrad f_1の安定多様体と，p_∞についてのgrad f_∞の不安定多様体の３つの交わりに一致する。この次元は$\eta(p_0)+\eta(p_1)-\eta(p_\infty)-\dim M$である。

Aが０でないと$\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$の次元は$\dim\mathcal{M}_0(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$と$2\phi_{c^1}(A)$だけ異なる。これは２個の場合つまり$\mathcal{M}_A(p,q)$の場合と同一である。

定理2.7について。$\displaystyle\bigcup_{\substack{2\phi_{c^1}(A)=\eta(p_\infty)-\eta(p_0)-\eta(p_1)+\dim M\\ \phi_\omega(A)\le C}} \mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)$は定理2.6より０次元多様体である。したがって定理2.7を示すにはこの集合がコンパクトであることを示せばよい。これは基本的にはsymplectic　volumeが有界であるような概複素曲線の族のコンパクト性を論じたグロモフの定理である。

定理2.8について。これは２個の時の同様な命題すなわち$\eta(p_1)-\eta(p_2)+2\phi_{c^1}(A)=1$ならば

$$\partial\overline{\mathcal{M}}_A(p_1,p_2)=\bigcup_{\substack{B\in\Lambda\\ q\in Cr(f)}}\overline{\mathcal{M}}_A(p_1,q)\times\overline{\mathcal{M}}_A(q,p_2)$$

と同じやり方で証明できる。

さてこの３つの定理を利用するとフレーアーホモロジーの間の写像

$$Q_2 : C(M,f_0;\Lambda_\omega)\otimes C(M,f_1;\Lambda_\omega)\to C(M,f_\infty;\Lambda_\omega)$$

が定義される。すなわち

(2.9) $$Q_2([\ell_0]\otimes[\ell_1])=\sum_{\eta(p_0)+\eta(p_1)-\eta(p_\infty)+2\phi_{c^1}(A)-\dim M=0}\#\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)\delta_A[\ell_\infty]$$

この式の右辺の係数 $\sum_{\eta(p_0)+\eta(p_1)-\eta(p_\infty)+2\phi_{c^1}(A)-\dim M=0}\#\mathcal{M}_A(\ell_0,\ell_1;\ell_\infty)\delta_A$ が一つ止めた $\ell_0,\ell_1;\ell_\infty$ に対して Λ_ω の元であることは，定理2.7の帰結である。

また定理2.8は（$\partial[p]=\sum_{\eta(p)-\eta(q)+2\phi_{c^1}(A)=1}\#\overline{\mathcal{M}}_A(p,q)\delta_A[q]$ であったことを思い出せば）$Q_2\partial([\ell_0]\otimes[\ell_1])=\partial Q_2([\ell_0]\otimes[\ell_1])$ を意味する。すなわち

定理2.10 Q_2 **はwell definedでチェイン写像である。❑**

$C(M,f_0;\Lambda_\omega),C(M,f_1;\Lambda_\omega),C(M,f_\infty;\Lambda_\omega)$ のホモロジーが全て $H(M;\Lambda_\omega)=H(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega$ であったことを思い出せそう（小野氏の項参照）。さらにポアンカレ双対で $H_i(M;\Lambda_\omega)\cong H^{\dim M-i}(M;\Lambda_\omega)$ とみなす。すると Q_2 は $H^i(M;\Lambda_\omega)\otimes H^j(M;\Lambda_\omega)\to H^{i+j}(M;\Lambda_\omega)$ なる写像を引き起こす。ただし δ_A の次数は $2\phi_{c^1}(A)$ と考える。これを量子カップ積という。

定理2.11 量子カップ積は f_0,f_1,f_∞ **の取り方によらない。❑**

証明の方法は８節の議論と同様で（もっと易しい）のでここでは述べない。

3　結合法則

超弦理論の別の利点として交叉対称性の説明が出来るという点が上げられる。これについて説明しよう。次の図を見ていただきたい。

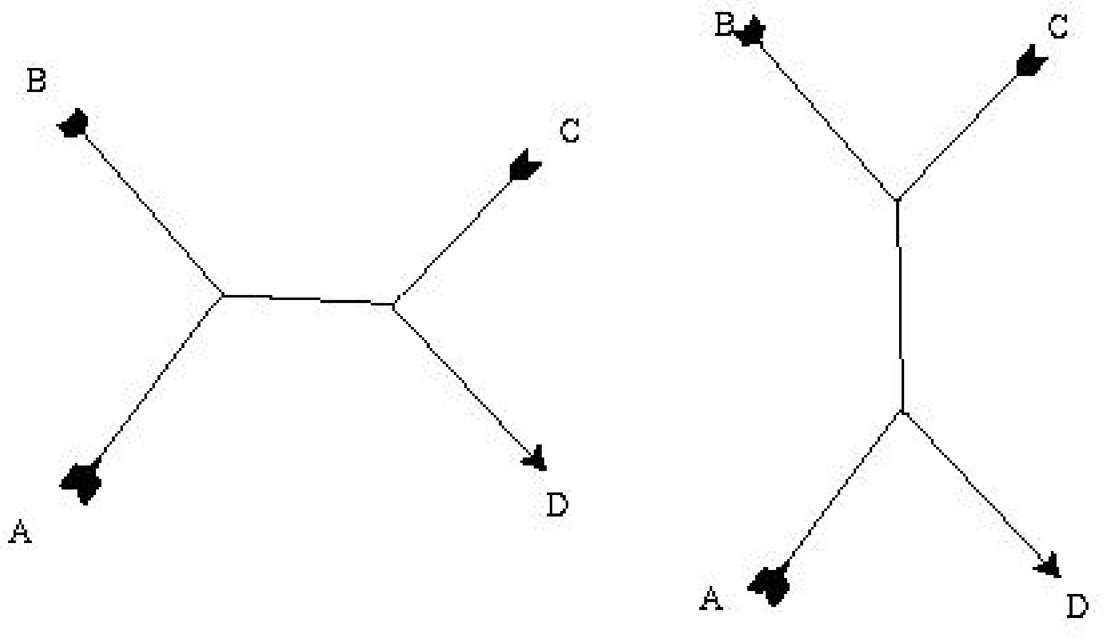

図3.1：交叉対称性

図3.1の二つの図はともにA,B,Cで表される粒子が衝突し，Dで表される粒子に変わる過程を表している。ただし左の図では先にAとBが衝突し右の図ではさきにBとCが衝突する。交叉対称性はこの二つの過程の起こる確率が同じであることを主張する。これは図3.1のようにするとなぜ成り立つのか特に理由がない。しかしこれを前節のように考えると，成立する理由がより明確になる。即ちこの２つの図は弦の運動だと考えれば両者とも次ページに示す同じ図になる。

前節の記述にもとずいてこの交叉対称性を数学的に正確に定式化し証明のあらましを述べよう。６つのモース関数 $f_1,\cdots,f_6$ を考える。このとき前節の構成は量子カップ積 $\eta_{f_i,f_j;f_k}:C(M,f_i;\Lambda_\omega)\otimes C(M,f_j;\Lambda_\omega)\to C(M,f_k;\Lambda_\omega)$ を与える。この節では次数はコホモロジーで考える。つまり $\ell_i=p$ の時，$\eta(\ell_i)$ は M の次元から p のモース指数を引いたものである。

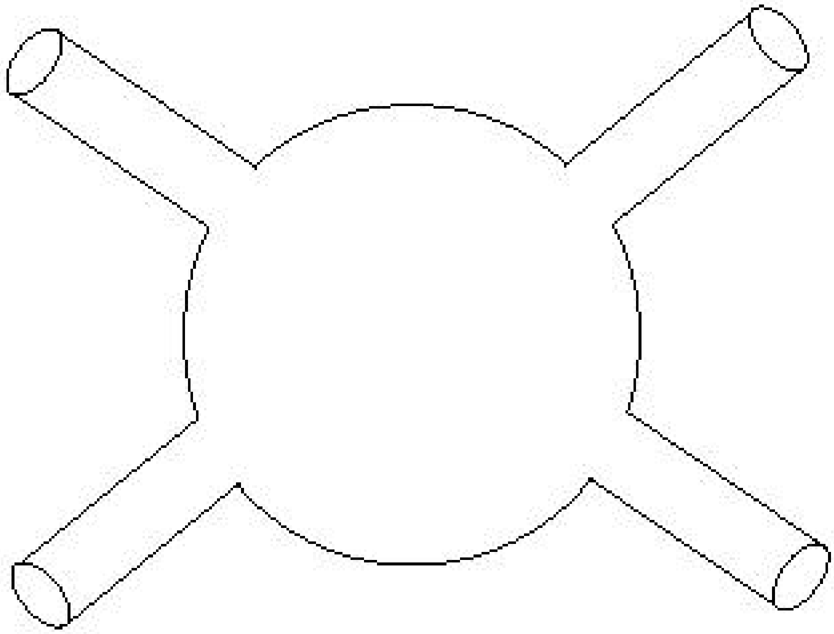

図3.2：弦理論における交叉対称性

定理3.3. $\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4} : C(M,f_1;\Lambda_\omega)\otimes C(M,f_2;\Lambda_\omega)\otimes C(M,f_3;\Lambda_\omega)\to C(M,f_4;\Lambda_\omega)$ **なる** $+1$ **次の写像が存在して，** $x_i\in C(M,f_i;\Lambda_\omega)$ **に対して**

$$\begin{aligned}
&\eta_{f_5,f_3;f_4}\left(\eta_{f_1,f_2;f_5}(x_1\otimes x_2)\otimes x_3\right)-\eta_{f_1,f_6;f_4}\left(x_1\otimes\eta_{f_2,f_3;f_6}(x_2\otimes x_3)\right)\\
&= \partial\left(\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(x_1\otimes x_2\otimes x_3)\right)-\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\partial x_1\otimes x_2\otimes x_3)\\
&\quad -(-1)^{\deg x_1}\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(x_1\otimes\partial x_2\otimes x_3)-(-1)^{\deg x_1+\deg x_2}\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(x_1\otimes x_2\otimes\partial x_3)
\end{aligned}$$

が成り立つ。❑

特にホモロジーレベルで考えると量子カップ積は結合的である。（この定理を用いて量子マッセイ積を定義することもできる。これについては[Fu1]参照。）

定理3.1の証明にはいかに定義する（2.5）を一般化したモデュライ空間を用いる。まず$\mathcal{T}_{0,4}$を

$$\mathcal{T}_{0,4}=\frac{\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in \boldsymbol{C}^4 \,\middle|\, z_i\neq z_j\right\}}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}}$$

で定義する。これは$\boldsymbol{C}-\{0,1,\infty\}$と同一視できる。（３点の場合にはこの空間は１点であっ

た。）$\mathcal{T}_{0,4} = \boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\}$ のコンパクト部分集合$\mathcal{K}$ をとりその元(z_1,z_2,z_3,z_4) に対してコンパクト集合 K_4 及び複素同型$\boldsymbol{C} - \{z_1,z_2,z_3,z_4\} - K_4 \cong 3\left(S^1 \times (-\infty,0)\right) \cup S^1 \times (0,\infty)$ を選ぶ。K_4 及びこの複素同型は $\mathcal{K}$ の元 (z_1,z_2,z_3,z_4) に滑らかに依存するように選んで置く。$\mathcal{T}_{0,4} = \boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\}$ のエンドの上では次のようにする。例えば一つのエンドは$(0,1,\infty,z)$ で z が十分無限大に近い元で代表される。複素同型で移すとこれは次のようになる。$K \subseteq \boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\}$ と複素同型$\boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\} - K \cong 2\left(S^1 \times (-\infty,0)\right) \cup S^1 \times (0,\infty)$ を２節と同様に選んで置く。$\boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\} - K - S^1 \times (T,\infty)$ と $\boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\} - K - S^1 \times (-\infty,-T)$ で $S^1 \times \{-T\}$ と $S^1 \times \{T\}$ を張り合わせて出来る図形（複素構造の入った曲面）を考える。（このとき$S^1 \times (-\infty,-T)$ は 0 に対応するエンドから取る。）張り合わせるときS^1 の回転の分の自由度が残るから，$T \in [T_0,\infty)$の分の自由度と併せて，このような図形の族は$S^1 \times [T_0,\infty)$に１対１に対応する。（図3.4参照。）これが $(0,1,\infty,z)$ で z が十分無限大に近い元で代表されるような$\mathcal{T}_{0,4} = \boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\}$ の点全体と同相である。

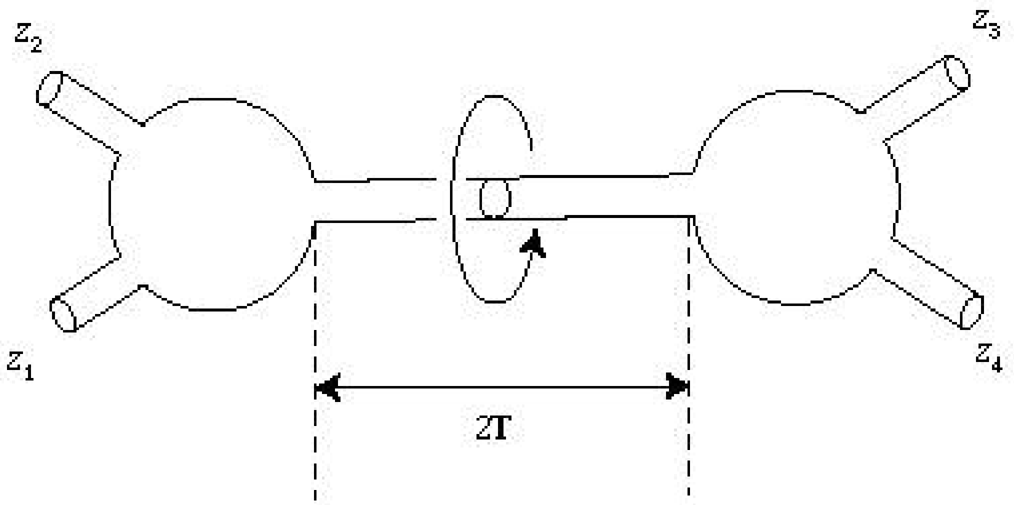

図3.4：　リーマン面の構成

さてこれで各々の$\mathcal{T}_{0,4} = \boldsymbol{C} - \{0,1,\infty\}$ に対してそれに対応するリーマン面引く４点上の座標が決まった。この４点に対応するエンドにそれが(z_1,z_2,z_3,z_4) のどれに対応するかにしたがって，１から４までの順番をふる。さて$\mathcal{T}_{0,4}$ の一点$\chi = (z_1,z_2,z_3,z_4)$を取りそれに対するリーマン面引く４点上の座標を決めてこれを使ってモヂュライ空間を次のように定義する。まず$\chi = (z_1,z_2,z_3,z_4)$が$\mathcal{K}$ に属するときは，方程式

$$\text{(3.5)}\qquad \begin{cases} D\varphi\circ J = J\circ D\varphi & \text{on } K^{(4)} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -J\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \chi(t)\,\mathrm{grad}_\varphi f_\alpha & \text{on } T_\alpha \end{cases}$$

を考える。ここで$T_\alpha = S^1\times(-\infty,0)$（$\alpha = 1,2,3$），$T_\alpha = S^1\times(0,\infty)$（$\alpha = 4$）である。そこで$\ell_\alpha$を$f_\alpha$の臨界点に値を持つ定値曲線として

$$\mathcal{M}(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4) = \left\{ \varphi : \boldsymbol{C}P^1 - \{z_1,z_2,z_3,z_4\}\to M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ satisfies (3.5)} \\ \lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t,s) = \ell_\alpha(s) \text{ on } T_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \\ \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,s) = \ell_4(s) \text{ on } T_4 \end{array} \right\}$$

とおく。

つぎに$\chi = (z_1,z_2,z_3,z_4)$が$\mathcal{T}_{0,4}$のエンドにあるときは方程式（3.4）を次のように少し変える。例えば$\chi = (z_1,z_2,z_3,z_4)$が図3.4のリーマン面に対応するとする。このリーマン面は$S^1\times[-T,T]$を含む。この集合$S^1\times[-T,T]$の外では（3.5）のままにしておき$S^1\times[-T,T]$では

$$\text{(3.6)}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -J\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \chi_T(t)\,\mathrm{grad}_\varphi f_5$$

を考える。ここでχ_Tは

$$\text{(3.7)}\qquad \chi_T(t) = \begin{cases} 1 & t\in[-T/2,T/2] \\ 0 & |t|\ge 2T/3 \end{cases}$$

を満たすように取る。（ここではz_4がz_3に近い場合であるが，z_1に近い場合には（3.6）でf_5のかわりにf_6を取る。z_4がz_2に近い場合はもう一つ別の関数f_7を取っておいてこれを取るのだがこの場合は我々は用いない。）方程式（3.6）を（3.5）のかわりに使って$\mathcal{M}(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$を定義する。

この二つを滑らかにつながなければならない。これには次のようにすればよい。$\rho : \mathcal{T}_{0,4}\to[0,1]$を$\mathcal{K}$上は０，$\mathcal{T}_{0,4}$のエンド上では１であるように取る。そこで$S^1\times[-T,T]$で（3.6）のかわりに

$$\text{(3.8)}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -J\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho(\chi)\chi_T(t)\,\mathrm{grad}_\varphi f_5$$

これで$\chi = (z_1,z_2,z_3,z_4)$に滑らかに依存するように方程式の族が出来た。この族を用いて

$\mathcal{M}(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$が定義される。さらにノビコフパラメータを扱うために$A\in\Lambda$に応じて$\mathcal{M}(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$を分解し

$$\mathcal{M}(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)=\bigcup_{A\in\Lambda}\mathcal{M}_A(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$$

とおく。

さて以上のように定義した$\mathcal{M}_A(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$の$\chi\in\mathcal{T}_{0,4}$全体をわたる和のことを$\mathcal{M}_A(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$とあらわそう。写像$\pi:\mathcal{M}_A(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)\to\mathcal{T}_{0,4}$が存在する。定理3.3の証明には次の命題が必要である。

命題3.7. genericなf_αに対して，$\mathcal{M}_A(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$は向きの付いた$\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)=0$次元の多様体である。任意のサイクル$C\subseteq\mathcal{T}_{0,4}$に対して，$f_\alpha$を少し動かして写像$\pi:\mathcal{M}_A(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)\to\mathcal{T}_{0,4}$が$C$と横断的であるように出来る。❑

この証明はふつうの横断正則性の議論である。（向き付けについての議論は省略する。）$\mathcal{M}(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$の次元に現れた$\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)+2$の$2$は$\mathcal{T}_{0,4}$の次元である。$\pi:\mathcal{M}_A(\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)\to\mathcal{T}_{0,4}$による$C$の逆像を$\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$と書く。この集合のコンパクト化について次のことが成立する。（必要な場合だけ述べる。）

命題3.8 $\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)+\dim C=1$**とし**$C$**を向きの付いたサイクルとすると，**$\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**は向きの付いた１次元多様体であるが，これはコンパクトな１次元多様体**$C\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**をコンパクト化として持つ。**$C\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**の境界は次の５つの空間の和と向きの付いた０次元多様体として可微分同相である。**

$$\bigcup_{\substack{\ell_1'\\ B\in\Lambda}}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_1,\ell_1')\times\mathcal{M}_{A-B}(C,\ell_1',\ell_2,\ell_3;\ell_4)$$

$$\bigcup_{\substack{\ell_2'\\ B\in\Lambda}}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_2,\ell_2')\times\mathcal{M}_{A-B}(C,\ell_1,\ell_2',\ell_3;\ell_4)$$

$$\bigcup_{\substack{\ell_3'\\ B\in\Lambda}}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_3,\ell_3')\times\mathcal{M}_{A-B}(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3';\ell_4)$$

$$\bigcup_{\substack{\ell_4'\\ B\in\Lambda}}\overline{\mathcal{M}}_B(\ell_4',\ell_4)\times\mathcal{M}_{A-B}(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4')$$

$$\mathcal{M}_A(\partial C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$$

また$\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)+\dim C=0$**とすると，**$\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**は有限集合である。❏**

さて命題3.7,3.8から定理を証明するには次のことが必要である。

命題3.9 $\chi=(z_1,z_2,z_3,z_4)$**とし**z_4**が**z_3**に十分近いならば，**$\mathcal{M}_A(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**は**$\bigcup_{\substack{\ell_5\in Cr(f_5)\\ B\in\Lambda}}\mathcal{M}_B(\ell_1,\ell_2;\ell_5)\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_5,\ell_3;\ell_4)$**に可微分同相である。また**$z_4$**が**$z_2$**に近いならば**$\mathcal{M}_A(\chi,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$**は**$\bigcup_{\substack{\ell_6\in Cr(f_6)\\ B\in\Lambda}}\mathcal{M}_B(\ell_1,\ell_6;\ell_4)\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_2,\ell_3;\ell_6)$**に可微分同相である。❏**

命題3.7+命題3.8+命題3.9⇒定理3.3の証明： z_4がz_3に十分近い$\chi_1=(z_1,z_2,z_3,z_4)$とz_4がz_2に十分近い$\chi_2=(z_1,z_2,z_3,z_4)$を選ぶ。この２点がそれぞれサイクルとみなして命題3.7の横断正則性が成り立っているとする。次にこの２点を結ぶ線分Cを選びこれに対しても命題3.7の横断正則性を仮定する。$\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)+1=0$なる$\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$を取る。これに対して

$$\left\langle\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle=\sum_A \#\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)\delta_A$$

と定義する。そして

$$\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=\sum_{\ell_4}\left\langle\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle\ell_4$$

とおく。

これが定理３．３の公式を満たすことを証明しよう。$\eta(\ell_1)+\eta(\ell_2)+\eta(\ell_3)-\eta(\ell_4)+2\phi_{c^1}(A)=0$なる$\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$を取る。命題３．７より$\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$は１次元多様体である。命題3.8を用いると$\mathcal{M}_A(C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$はコンパクト化されその境界は命題3.8で述べられた５つの集合の和集合である。このうち最初の３つの位数は順に$\left\langle\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\partial\ell_1,\ell_2,\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle$，$\left\langle\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\partial\ell_2,\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle$，$\left\langle\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\ell_2,\partial\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle$，$\left\langle\partial\eta^{(3)}_{f_1,f_2,f_3;f_4}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\middle|\ell_4\right\rangle$の$\delta_A$の係数である。一方命題３．９より$\mathcal{M}_A(\partial C,\ell_1,\ell_2,\ell_3;\ell_4)$は$\bigcup_{\substack{\ell_5\in Cr(f_5)\\ B\in\Lambda}}\mathcal{M}_B(\ell_1,\ell_2;\ell_5)\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_5,\ell_3;\ell_4)$と$\bigcup_{\substack{\ell_6\in Cr(f_6)\\ B\in\Lambda}}\mathcal{M}_B(\ell_1,\ell_6;\ell_4)\times\mathcal{M}_{A-B}(\ell_2,\ell_3;\ell_6)$（の向きを変えたもの）の和に一致する。したがってこの位数は

$$\left\langle \eta_{f_5,f_3;f_4}\left(\eta_{f_1,f_2;f_5}(\ell_1,\ell_2),\ell_3\right)\middle|\ell_4\right\rangle - \left\langle \eta_{f_1,f_6;f_4}\left(\ell_1,\eta_{f_2,f_3;f_6}(\ell_2,\ell_3)\right)\middle|\ell_4\right\rangle$$

でのδ_Aの係数である。これから定理3.3が得られる。

命題3.7と3.8の証明はほぼ前節の定理2.6および2.8と同様である。命題3.9の証明はゲージ理論におけるタウベスのはり合わせのアナロジーである。これらについては機会があったら後に書くことにしたい。

4　ボット・モース関数

前節までの構成と同値な構成をフレーアーホモロジーを用いないで行うことが出来る。これはグロモフの論文[G]にあったアイデアを顕在させた構成である。（同様な構成はマクダフなども[G]にならって行っていた。）またウィッテンの論文[W3]での不変量はこれと同じものである。

これらのアイデアにもとずいてここに述べる構成を数学的に厳密に実行したのはルアン[R1]である。

この構成では摂動を行わず方程式（1.1）そのものを用いる。この場合問題になるのは（1.1）の定常解（定値曲線）が退化していることである。この点をもう少し説明しよう。（1.1）はある$\Omega(M)$上の関数（エネルギー）の勾配ベクトル場である。これは小野氏の項にもあるが重要なことなのでここでもう一度説明しよう。まず$\Omega(M)$の被覆空間$\tilde{\Omega}(M)$を

$$\tilde{\Omega}(M) = \left\{ (\ell,[u]) \,\middle|\, \ell \in \Omega(M),\ u : D^2 \to M,\ u|_{S^1} = \ell \right\}$$

で定義する。ただし$[u]$は同値関係

$$u \approx u' \Leftrightarrow u - u' \in \ker\phi_{c^1} \cap \ker\phi_\omega$$

による同値類をあらわす。この上の関数$\mathcal{A} : \tilde{\Omega}(M) \to \boldsymbol{R}$を

$$\mathcal{A}(\ell,[u]) = \int_{D^2} u^* \omega$$

で定義する。

定理4.1　$\mathcal{A} : \tilde{\Omega}(M) \to \boldsymbol{R}$ **の勾配ベクトル場の積分曲線は方程式（1.1）で与えられる。**❑

これはフレーアーホモロジーの研究の根幹に位置する大事な命題である。証明は直接計算で容易に出来る。（あるいは小野氏の項を見ていただきたい。）

さてしたがって$\mathcal{A}$の停留点が（1.1）の定常解であった。$\mathcal{A}$を摂動すればそれはモース関数になる。（小野氏の項参照。）これが１から３節の立場であった。ここでは摂動をしないで考える。その場合は$\mathcal{A}$はボット・モース関数である。

定義4.2　**有限次元の多様体**X**上の関数**$f : X \to \boldsymbol{R}$**がボット・モース関数であるとは，臨**

界点の集合$\{p \in X \mid df(p)\}$がXの部分多様体の和集合であって，その各々の連結成分R_iの任意の点pに対して$\mathrm{Hess}_p f$の法束NR_iへの制限が非退化であることを指す。❑

$\{p \in X \mid df(p)\}$の連結成分である部分多様体のことを臨界部分多様体と呼ぶ。臨界部分多様体に対してそのモース指数を$\mathrm{Hess}_p f$の負の固有値の数と定義する。以後R_iはモース指数がiの臨界部分多様体の和とする。

我々の状況は無限次元であるが無限次元の場合のボット・モース関数は定義しない。（ヘッシアンの定義自身デリケートである。）さて関数$\mathcal{A}$の臨界部分多様体を考える。じつはそれはM自身である。つまり定値曲線である。我々は被覆空間$\tilde{\Omega}(M)$を取ったので，臨界部分多様体はΛの元でパラメーターづけられる無限個の連結成分を持つ。（$[u]$の方の取り方に対応する。）（これがノビコフ環の表れる理由とみなせる。）

それはさておき，ボット・モース関数に対してはつぎの定理が成り立つ。

定理4.3 **$f : X \to \boldsymbol{R}$がボット・モース関数でR_iがその臨界部分多様体とする。$f : X \to \boldsymbol{R}$は Weakly self-indexing とする。（この概念は説明はもう少し後に行う。我々の場合自動的に満たされている。）するとスペクトル列E_{ij}^kがあって，**

(4.3.1) $E_{ij}^1 = H_i(R_j;\boldsymbol{Z})$

(4.3.2) $E_{ij}^\infty \Rightarrow H_{i+j}(X;\boldsymbol{Z})$

である。❑

この定理は後に同変コホモロジーを論ずるときもう少し本格的に論ずる。ここでは（無限次元だが定理はそのまま使える）実はこのスペクトル列は退化し，結局

$$HF(M) = \bigoplus_{[u]\in\Lambda} H(M) \tag{4.4}$$

なるすでに述べた関係式になる。ここで左辺はフレーアーホモロジー右辺は同じもの（Mの普通のホモロジー）の$\#\Lambda$個の和。したがってこれだけでは新しいことを述べたわけではない。

さて（1.1）の定常解が退化しているから状態空間を作るには定常解の空間のホモロジーを取る必要がある。これが（4.4）のいっていることである。このために一種の特異ホモロジー論を使うが，ふつうと少しちがうものを使った方が便利である。

定義4.5 **Pがn次元の単体複体としたときPがn次元の抽象幾何学的チェインであるとは，$P - P_{(n-2)}$が境界付き向き付き多様体でまたPで稠密なことをいう。ここで$P_{(n-2)}$とはPの$n-2$次元以下のセルの和を指す。**

またMが微分可能多様体であるときMの幾何学的チェインとは(P,φ)なる組のことであ

る。ここでPはn次元の抽象幾何学的チェインで$\varphi : P \to M$は区分的に無限階微分可能な写像である。❑

n次元の幾何学的チェイン全体の作る自由アーベル群を

$$(P,\varphi)+(P',\varphi')=(P\vee P',\varphi\vee\varphi')$$
$$-(P,\varphi)-=(-P,\varphi)$$

なる関係式で割った群を$C_n^{geo}(M)$と書く。またPがn次元の抽象幾何学的チェインであるとき$P-P_{(n-2)}$の境界の閉包のことを∂Pと書く。これは$n-1$次元の抽象幾何学的チェインである。これを使って$\partial : C_n^{geo}(M)\to C_{n-1}^{geo}(M)$を

$$\partial(P,\varphi)=(\partial P,\varphi|_{\partial P})$$

で定義する。

補題4.6 $H_n(M;\boldsymbol{Z})=\dfrac{\mathrm{Ker}(\partial : C_n^{geo}(M)\to C_{n-1}^{geo}(M))}{\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}^{geo}(M)\to C_n^{geo}(M))}$ ❑

証明はホモロジー論の演習問題である。

さてここで定理4.3を証明しておこう。（定理4.3は第C章まで使わないからここで次の節に移ってもよい。）R_i，R_jなる臨界部分多様体がある時

$$\mathcal{M}(R_i,R_j;f)=\left\{\ell : \boldsymbol{R}\to M \;\middle|\; \begin{array}{l} \dfrac{d\gamma}{dt}=-\mathrm{grad}\ f \\ \lim\limits_{t\to-\infty}\gamma(t)\in R_i \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)\in R_j \end{array}\right\}$$

と置く。

補題4.7 **fを臨界点の外で摂動して，$\mathcal{M}(R_i,R_j;f)$が$i-j+\dim R_i$次元の多様体になるように出来る。**

証明は省略する。（単純な横断正則性の議論である。）

$i<j \Rightarrow \mathcal{M}(R_i,R_j;f)$が成り立つとき$f$は Weakly self-indexing という（[AB]）。さて$\pi_l : \mathcal{M}(R_i,R_j;f)\to R_i$，$\pi_r : \mathcal{M}(R_i,R_j;f)\to R_j$を$\gamma\mapsto\lim\limits_{t\to\pm\infty}\gamma(t)$で定める。$\hat{C}_n^{geo}(M)$でこれらの写

像全てと横断正則的である$C_n^{geo}(M)$の元全体をあらわす。ボット・モース関数に対するウィッテン複体の一般化を次のように定義する。

定義4.8　$C_i(f) = \oplus_j \hat{C}_j^{geo}(R_{i-j})$**。**

境界作用素を定義しよう。それには$\partial_k : \hat{C}_j^{geo}(R_i) \to \hat{C}_{j+k-1}^{geo}(R_{i-k})$を

$$\partial_k([P,\varphi]) = \left[\overline{\mathcal{M}}(R_i,R_j;f) \times_{R_i} P, \pi_r\right] \tag{4.9}$$

$$\overline{\mathcal{M}}(R_i,R_j;f) \times_{R_i} P = \left\{([\gamma,x] \in \overline{\mathcal{M}}(R_i,R_j;f) \times P \,\middle|\, \pi_l(\gamma) = \varphi(x)\right\} \tag{4.10}$$

で定義する。（4.10）の空間の次元が$\partial_k : \hat{C}_j^{geo}(R_i) \to \hat{C}_{j+k-1}^{geo}(R_{i-k})$の次元とあっているのは横断正則性と補題4.7の帰結である。$\partial_0 : \hat{C}_j^{geo}(R_i) \to \hat{C}_{j-1}^{geo}(R_i)$をふつうの境界作用素とし$\partial = \partial_0 + \partial_1 + \cdots$と置く。

補題4.10　$\partial \circ \partial = 0$**。また**$(C_i(f),\partial)$**のホモロジーは**$M$**のホモロジーに一致する。**

証明は省略する。（というより8節の議論で示される。）一方で$C_i(f)_n = \oplus_{i-j \le n} \hat{C}_j^{geo}(R_{i-j})$と置くとこれは$(C_i(f),\partial)$のフィルトレーションを与える。このフィルトレーションに対するスペクトル列が定理4.3のものである。証明の細部は省略した[Fu2]をごらん頂きたい。

5　グロモフ・ウィッテン不変量

　さてここで，グロモフ・ウィッテン不変量の構成の中心となるモデュライ空間を定義しよう。まず$N^{\hat{k}} = \left\{ (p_1, \cdots, p_k) \in N^k \;\middle|\; p_i \neq p_j \right\}$とおき，

$$\mathcal{T}_{0,k} = \frac{\left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{\hat{k}}}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}}$$

と定義する。次に$A \in \pi_2(M)$に対して

$$\mathcal{M}_A(M) = \left\{ \varphi : \boldsymbol{C}P^1 \to M \,\middle|\, \varphi J = J\varphi \right\}$$

とおく。これを使って

$$ev_k : \mathcal{M}_A(M) \times \left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{\hat{k}} \to M^k$$
$$ev_k(\varphi; z_1, \cdots, z_k) = \left(\varphi(z_1), \cdots, \varphi(z_k)\right)$$

を定義する。

$$\mathcal{M}_A(M,0,k) = \frac{\mathcal{M}_A(M) \times \left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{\hat{k}}}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}P^1}$$

とおくと，

$$ev_k : \mathcal{M}_A(M,0,k) \to M^k$$

が導かれる。また

$$\pi_k : \mathcal{M}_A(M,0,k) \to \mathcal{T}_{0,k}$$

も定まる。グロモフ・ウィッテン不変量を数学的に厳密に定義しようとすると考えなければならないデリケートな点がいろいろでてくる。それらをまっとうに扱っていると結構しんどいので，それは後にしてまず気楽に「定義」してしまおう。従ってしばらく出てくる「定理」も「定義」厳密には嘘である。

「定理5.1」　M **をWeakly　monotoneとし** $A \in \pi_2(M)$ **はprimitiveとする。** M **のgenericな概複素構造に対して** $\mathcal{M}_A(M)$ **は** $\dim M + 2\phi_{c^1}(A)$ **次元の向きの付いた多様体である。❑**

　すると

「定理5.2」　$\mathcal{M}_A(M,0,k)$ **はコンパクト化** $C\mathcal{M}_A(M,0,k)$ **をもち，** $ev_k : \mathcal{M}_A(M,0,k) \to M^k$ **は** $C\mathcal{M}_A(M,0,k)$ **まで拡張され，** $C\mathcal{M}_A(M,0,k) - \mathcal{M}_A(M,0,k)$ **は余次元２以上である。❑**

　これを使って，グロモフ・ウィッテン不変量を定義しよう。$\hat{C}_i^{geo}(M^k)$ を $ev_k : \mathcal{M}_A(M,0,k) \to M^k$ と横断的な幾何学的チェイン全体とする。

補題5.3　$\hat{C}_i^{geo}(M^k) \to C_i^{geo}(M^k)$ **はホモロジーに同型を導く。❑**

　これはほかの部分が成り立つ状況では嘘ではない。証明は単純な横断正則性定理である。さて「定理5.1」と「定理5.2」により $ev_k : \mathcal{M}_A(M,0,k) \to M^k$ によって $\hat{C}_i^{geo}(M^k)$ の双対の元が定まる。この元は幾何学的サイクルのポアンカレ双対であるから，$Hom(\hat{C}_i^{geo}(M^k), \boldsymbol{Z})$ のコサイクルとみなせる。これと補題を用いて

（5.4）
$$H_{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes H_{i_k}(M;\boldsymbol{Z}) \to H_{\sum i_j}(M^k;\boldsymbol{Z}) \xrightarrow{\bullet ev_k[\mathcal{M}_A(M,0,k)]} \boldsymbol{Z}$$

が定まる。ただし $\dim M^k = \dim \mathcal{M}_A(M,0,k) + \sum i_k$ とした。即ち $\dim M + 2\phi_{c^1}(A) + 2k - 6 = \sum(\dim M - i_k)$ である。

　この「定義」は次のように言い換えられる。$C_{i_j} \in C_{i_j}^{geo}(M)$ を幾何学的サイクルとし $C_{i_1} \times \cdots \times C_{i_k} \in \hat{C}_i^{geo}(M^k)$ とする。このとき（５．１１）の写像による $[C_{i_1}] \otimes \cdots \otimes [C_{i_k}] \in H_{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes H_{i_k}(M;\boldsymbol{Z})$ の行き先は次の集合の符合付き位数である。

（5.5）
$$\frac{\left\{ (\varphi; z_1, \cdots, z_k) \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{M}_A(M),\ (z_1,\cdots,z_k) \in \left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{\hat{k}} \\ \varphi(z_i) \in C_i \end{array} \right\}}{\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}P^1)}$$

「定義5.6」　この数を

$$\Psi_A^{((),k)}([C_1],\cdots,[C_k];M)$$

であらわす。❑

これは点の方を自由に動かした場合の話だったが，第２節で定義したのと一致するのはタイヒミューラーパラメーター$\mathcal{T}_{0,k}$の方を止めて得られるものである。すなわち$\chi\in\mathcal{T}_{0,k}$とし

$$ev_k : \mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)\to M^k \tag{5.7}$$

を考えるのである。この場合の根拠は次の通りである。

「定理5.8」　generic な$\chi\in\mathcal{T}_{0,k}$に対して$\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)$は$\dim M+2\phi_{c^1}(A)$次元の多様体で，その$C\mathcal{M}_A(M,0,k)$での閉包を$\overline{\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)}$とすると，$\overline{\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)}-\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)$は余次元２以上である。❑

従って，$\overline{\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)}$を$C\mathcal{M}_A(M,0,k)$のかわりに使って定義5.6をまねればよい。もう少し書くと次のようにする。$\chi=(z_1,\cdots,z_k)$とする。（ただし$k\ge 3$とする。）（本当は$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P^1)$で同一視するのだから，$\chi=[z_1,\cdots,z_k]$と書くべきである。）

$C_{i_j}\in C_{i_j}^{geo}(M)$をしかるべく横断正則性を満たす幾何学的サイクルとする。$\dim M+2\phi_{c^1}(A)=\sum(\dim M-i_k)$を仮定する。この時集合

$$\left\{\varphi\,\middle|\,\begin{array}{l}\varphi\in\mathcal{M}_A(M),\\ \varphi(z_i)\in C_i\end{array}\right\}$$

を考える。これはファイバー積でかくと

$$\left(\overline{\mathcal{M}_A(M,0,k)\cap\pi_k^{-1}(\chi)}\right)\times_{M^k}(C_1\times\cdots\times C_k) \tag{5.9}$$

である。

「定義5.10」　(5.9)**の位数を**$\Phi_A^{(0,k)}([C_1],\cdots,[C_k];M)$**とする。❑**

これは実は$\chi=(z_1,\cdots,z_k)$にも概複素構造にもよらない。

さて以上のことが実現されるべきアイデアである。何処が難しいか順々に説明しよう。まずうまく行くことから考えるとしてコンパクト性を思いだそう。これは小野氏の項にもあるが。（ここからは定理・定義と書いたらちゃんとした定理・定義である。）

定理5.11(Gromov)　$\varphi_i \in \mathcal{M}_A(M)$**とする。有限この点**$p_1,\cdots,p_k \in \boldsymbol{C}P^1$**があり，**$\varphi_i$**は**$\boldsymbol{C}P^1-\{p_1,\cdots,p_k\}$**でコンパクト**$C^\infty$**収束する部分列を持つ。❑**

例5.12　$M=\boldsymbol{C}P^n$，$A=m[\boldsymbol{C}P^1]$，$m>0$とする。このとき$\mathcal{M}_A(\boldsymbol{C}P^n)$の元は斉次座標で$(P_0,\cdots,P_n)$（$P_i$は多項式で共通因子を持たない，$\max\{\deg P_i\}=m$）とあらわされる。これはしたがって$\boldsymbol{C}P^{(n+1)m-1}$の稠密な開集合である。$(P_0^{(i)},\cdots,P_n^{(i)})$であらわされる$\mathcal{M}_A(\boldsymbol{C}P^n)$の元の列が発散するのは一つには$P_k^{(i)}$が各$k$に対して（$P_k^{(\infty)}$に）収束し，しかし$P_0^{(\infty)},\cdots,P_n^{(\infty)}$には共通因子があるときである。$P_0^{(\infty)},\cdots,P_n^{(\infty)}$の最大公約数を$(z-a_1)\cdots(z-a_k)$とすると$\boldsymbol{C}P^1-\{a_1,\cdots,a_k\}$で$(P_0^{(i)},\cdots,P_n^{(i)})$は$\left(\dfrac{P_0^{(\infty)}}{(z-a_1)\cdots(z-a_k)},\cdots,\dfrac{P_n^{(\infty)}}{(z-a_1)\cdots(z-a_k)}\right)$にコンパクト$C^\infty$収束する。また$\max\{\deg P_0^{(\infty)},\cdots,\deg P_n^{(\infty)}\}<m$時はさらに$\infty$も除くとコンパクト$C^\infty$収束する。❑

次の定理は定理5.11の極限が$\boldsymbol{C}P^1$全体からの概複素写像にのびることを主張する。

定理5.13(Gromov)　$\varphi:\boldsymbol{C}P^1-\{a_1,\cdots,a_k\}\to M$**を概複素写像とし**$\int_{\boldsymbol{C}P^1-\{a_1,\cdots,a_k\}}\varphi^*\omega<\infty$**とする。このとき**$\varphi:\boldsymbol{C}P^1-\{a_1,\cdots,a_k\}\to M$**は**$\overline{\varphi}:\boldsymbol{C}P^1\to M$**なる概複素写像に一意に拡張される。❑**

さて定理5.11での収束しなかった点での振る舞いはどうなるであろうか。これを見るには$\psi_i\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}P^1)$をうまく選んで，これらの点の一つで$\varphi_i\psi_i$のノルムが１に近いようにする必要がある。（これは言い換えると$a_1,\cdots,a_k$の各点で写像を拡大することにあたる。）こうすると$\varphi_i\psi_i$に定理5.11の極限をとることが出来る。この極限はもとのφ_iの極限とは異なる。これがバブルと呼ばれる現象である。例を見てみよう。

例5.14　$M=\boldsymbol{C}P^2$，$\varphi_i=((z-1/i)(z-1),z,z(z-2))$としよう。これは極限で$z$を共通０点に持つ。したがって０で発散する。そこで０で共形変換$\psi_i:z\mapsto z/i$をしよう。すると$\varphi_i\psi_i$の極限は$\varphi_i\psi_i=((z/i-1/i)(z/i-1),z/i,z/i(z/i-2))=((z-1)(z/i-1),z,z(z/i-2))$ゆえ$(-(z-1),z,-2z)$である。一方で$\varphi_i$の極限は$(z-1,1,z-2)$である。この二つはそれぞれ写像度１である。またこの二つは$[-1,1,-2]$で交わる。

結局写像度２の写像が，写像度１の二つの写像の和に収束し，またこの二つの写像は交点を持つことになる。（図5.15）

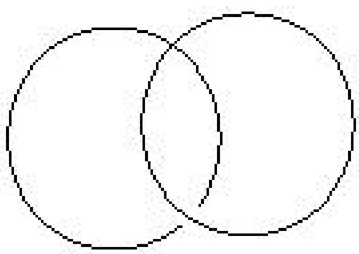

図5.15：二つの球面が一点で交わる。

　このような図形を一般化したものが極限としてあらわれる。これをもう少し正確に述べよう。有限個の$\boldsymbol{C}P^1$たちを有限個の点で同一視した図形を考える。このような図形で単連結なものを genus 0の点なし準安定曲線と呼ぼう。 genus 0の点なし準安定曲線からの写像が概正則写像であるとは，それが連続で，各々の$\boldsymbol{C}P^1$上で概正則なことをいう。

定理5.16(Gromov)　**$\mathcal{M}_A(M)$の元をその像と同一視して，Mの部分集合とみなすと，$\mathcal{M}_A(M)$の元の極限はgenus 0の点なし準安定曲線からの概正則写像の像になる。❑**

　さて「定理5.1」を認めてしまえば，定理5 .16から「定理5.2」が示されることを見よう。それには準安定曲線で１つの$\boldsymbol{C}P^1$の像でないものの次元を数えればよい。簡単のため２つの$\boldsymbol{C}P^1$の像になっているものを数えよう。

　$\varphi_i:\boldsymbol{C}P^1\to M$とし$\varphi_i[\boldsymbol{C}P^1]=A_i$としよう。$\varphi_1(\boldsymbol{C}P^1)\cup\varphi_2(\boldsymbol{C}P^1)$が$\mathcal{M}_A(M)$の元の極限になっているためには$A_1+A_2=A$でなければならない。従って$\dim\mathcal{M}_A(M)=\dim M+2\phi_{c^1}(A)$ゆえ

$$\dim\mathcal{M}_{A_1}(M)+\dim\mathcal{M}_{A_2}(M)=\dim M+\dim\mathcal{M}_A(M)$$

である。よって

$$\dim\mathcal{M}_A(M,0,k_1)+\dim\mathcal{M}_A(M,0,k_2)=\dim M+\dim\mathcal{M}_A(M,0,k_1+k_2)-6$$

である。ところで二つのリーマン面がn次元多様体に含まれるときこの二つが（どこかで）交わるというのは，方程式$n-2-2$個分の条件である。（ここの$-2-2$というのは交わるという条件をかすペアの取り方が４次元分あるからである。）従って２つの球面の和に分解している元に対応する$\mathcal{M}_A(M,0,k)$のコンパクト化の元全体は余次元２以上である。これが「定理5.2」の主張である。

　「定理5.8」の方のコンパクト化についての主張も「定理5.1」を認めてしまえば，定理5.16から同様に証明できる。

　というわけで問題は「定理5.1」の次元の計算に帰着した。定理5.1は実は一般には成立しない。これが話を面倒にする点である。

　この点を議論しよう。まず定理5.1の次元公式はコーシーリーマン作用素（我々の方程式の線形化作用素）の指数としてであればこの場合も成立する。また次のことは正しい。

命題5.17　$A \in \pi_2(M)$**はprimitiveであるとする。すなわち**$A = mB$**，**$m > 0$**なる**B**は存在しないとする。この時定理5.1は成立する□**

ここで$A \in \pi_2(M)$はprimitiveとした理由を述べる。これは小野氏の項に触れられている横断正則性の問題に関わる。すなわちそこでは横断正則性が成り立ち次元の計算がうまく行くための条件として"somewhere injective"という（マクダフによる）条件が説明されている。これが満たされないのは$\varphi = \mathcal{M}_A(M)$写像度が１でない$\psi : \boldsymbol{C}P^1 \to \boldsymbol{C}P^1$を使って$\varphi = \varphi' \circ \psi$と書けてしまう場合であった。このような点はAut$\boldsymbol{C}$の不動点に対応して"ゲージ群"Aut$\boldsymbol{C} = PSL(2;\boldsymbol{C})$の元で止まる点すなわちこれで割った後は特異点になる点である。

マクダフの定理の主張は写像度が１でない$\psi : \boldsymbol{C}P^1 \to \boldsymbol{C}P^1$を使って$\varphi = \varphi' \circ \psi$と書けない$\varphi = \mathcal{M}_A(M)$の近傍では横断正則性が成立するようにいつでも概複素構造を摂動出来るというものであった。これが命題5.17の根拠である。しかし実は命題5.17ではprimitiveな元に対応する不変量も定義できない。なぜなら$A \in \pi_2(M)$はprimitiveでも$A = A_1 + A_2$でprimitiveでないA_iがあるかも知れないから。従ってもっとよく考えなければならない。

そこでまず somewhere injective でないとつごうが悪い理由を例で示してみよう。$\phi_{c^1}(A) = 0$で$A = 2B$である場合を考えよう。したがって$\mathcal{M}_A(M)$と$\mathcal{M}_B(M)$のvirtual dimensionは一致する。ところが$\mathcal{M}_B(M)$の任意の元と写像度が２の$\psi : \boldsymbol{C}P^1 \to \boldsymbol{C}P^1$の合成は$\mathcal{M}_A(M)$の元である。写像度が２の$\psi : \boldsymbol{C}P^1 \to \boldsymbol{C}P^1$なる正則写像は複素５次元あって$\boldsymbol{C}P^1$の自己同型で相殺される分（複素３次元）を差し引いても複素２次元ある。したがって$\mathcal{M}_A(M)$のこのような元全体の作る空間は virtual dimension より真に次元が大きい。この現象はいかに概複素構造を摂動しても消えることはない。

我々のモデュライ空間はこの群Aut$\boldsymbol{C} = PSL(2;\boldsymbol{C})$で割っていないが，摂動として概複素構造の摂動を取る限りモデュライ空間は$PSL(2;\boldsymbol{C})$不変であるから，横断正則性は$PSL(2;\boldsymbol{C})$による商空間で考えなければならない。したがって不動点があると横断正則性は成立しない。これはゲージ理論で可約接続が引き起こしていた問題に対応する。しかし実はこの場合はもっとやっかいである。なぜならここでのゲージ群は$PSL(2;\boldsymbol{C})$なる非コンパクト群であるからで，したがって等法部分群の位数はあらかじめはまったく分からない。以上の問題点を言い換えれば点のない$\boldsymbol{C}P^1$が代数幾何の意味で安定曲線でないからである。（すなわち$PSL(2;\boldsymbol{C})$なる自明でない群が作用する。）この辺の点は（多分）代数幾何学の基本的な点に関わる。例えばグロタンディックがスキーム理論を創始したときにはnon reduced な対象をモデュライの問題と関わって扱うことが大事な動機の一つであったはずである。

これを解決する方法としては$PSL(2;\boldsymbol{C})$対称性を壊すような摂動をする事が考えられる。この線でやってみよう。

我々の考えていたのは方程式$\varphi J = J\varphi$であり言い換えると$\bar\partial\varphi = 0$である。これは$PSL(2;\boldsymbol{C})$不変である。横断正則性のためにはこの対称性を崩す必要がある。それには非斉次項を付け足し方程式を$\bar\partial\varphi = g$で置き換える。正確には次のようにする。直積$\boldsymbol{C}P^1\times M$を考える。この上にベクトル束$\pi_1^*\Lambda^{0,1}\otimes\pi_2^*TM$を考えよう。$g$をこのベクトル束の切断とする。$\varphi:\boldsymbol{C}P^1\to M$とするとその微分の$(0,1)$成分は切断

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\varphi\in\Gamma(\boldsymbol{C}P^1;(\varphi,id)^*(\pi_1^*\Lambda^{0,1}\otimes\pi_2^*TM))$$

を与える。ここで$(\varphi,id):\boldsymbol{C}P^1\to M\times\boldsymbol{C}P^1,\ z\mapsto(\varphi(z),z)$である。方程式

（5.18）
$$\bar\partial\varphi = g$$

とは$\frac{\partial}{\partial\bar z}\varphi = (\varphi,id)^*(g)$の意味である。こうすると$g$を$PSL(2;\boldsymbol{C})$不変でなく取ることで対称性を崩すことができる。これを用いて

$$\mathcal{M}_A(M,g) = \left\{\varphi:\boldsymbol{C}P^1\to M \mid (5.18)\right\}$$

と定義する。ここで対称性を崩してしまったから，$ev_k:\dfrac{\mathcal{M}_A(M)\times\left(\boldsymbol{C}P^1\right)^k}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}P^1}\to M^k$をそのまま定義すると問題が生ずる。しかし$\left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\varphi\in\mathcal{M}_A(M),\\ \varphi(z_i)\in C_i\end{array}\right\}$を考える分にはこれはかまわない。即ち我々は次の集合を考えよう。

（5.19）
$$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g) = \left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\bar\partial\varphi = g,\\ \varphi(z_i)\in C_i\\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1]) = A\end{array}\right\}$$

命題5.20　genericな概複素構造とgに対して$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$は$\dim M + 2\phi_{c^1}(A) - \sum(\dim M - \dim C_i)$次元の多様体である。

ここまではよい。次にこのコンパクト化を問題にしなければならない。これは問題が大きい。なぜなら我々の方程式は今は非斉次項があり共形不変ではない。つまりバブルと本体とははっきり区別しなければならない。すると本体の方には非斉次項が残るがバブルには非斉次項は残らない。これが問題になる。これを考察しよう。

まずバブルには点z_iの内高々１つしかのっていないことを思い出そう。そこで場合を

２つに分ける。

（場合１）　のっている点がないとき。バブルのホモロジー類をBとしよう。

（場合１の１）　$\phi_{c^1}(B)<0$とき。　実はこの場合は今の所いかんともしがたい。すなわちこのようなバブルが somewhere injective でないと，横断正則性を実現する方法は知られていない。これが negative multiple cover の問題である。これが解ければアーノルド予想の一般の場合の解決などに応用があるのだが。従ってこれはないと仮定するしかない。このための十分条件が Weakly monotone であった。（小野氏の項参照）。

（場合１の２）　$\phi_{c^1}(B)\ge 0$とき。実はこれはOKである。なぜか。簡単のためほかにバブルもないし，また本体は一個だけとしよう。すなわち$A=B+A'$で$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$の元の極限が$\mathcal{M}_{A'}(M;C_1,\cdots,C_k;g)$の元と$\mathcal{M}_B(M)$の元の和になっているとするわけだ。この時は$\phi_{c^1}(A')\le\phi_{c^1}(A)$である。

もしさらに$\phi_{c^1}(B)>0$ならば$\dim\mathcal{M}_{A'}(M;C_1,\cdots,C_k;g)\le\dim\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)-2$であるから，もう一方のことは忘れてもよい。（すなわち$\mathcal{M}_{A'}(M;C_1,\cdots,C_k;g)$を使ってコンパクト化すればよい。）

では$\phi_{c^1}(B)=0$としよう。この時$B=mB'$。$\mathcal{M}(B')$の somewhere injective な元を全部集めたものを$\mathcal{M}_0(B')$と書く。$\dim\mathcal{M}_0(B')=\dim M$である。また$\dim\mathcal{M}_{A'}(M;C_1,\cdots,C_k;g)=\dim\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$　である。さて$\mathcal{M}_{A'}(M;C_1,\cdots,C_k;g)$の元が$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$の境界に現れるという条件は，どれかの$B'$に対する$\mathcal{M}_0(B')$のどれかの元と交わるという条件を導く。従ってこの条件は$2+2-\dim M-\dim\mathcal{M}(B')-6$だけ次元を変える。この数は–2以下である。よってこの場合もOK。

（場合２）　のっている点が１個z_1の時。バブルのホモロジー類をやはりBとしよう。この時の極限の絵は次の通りである。

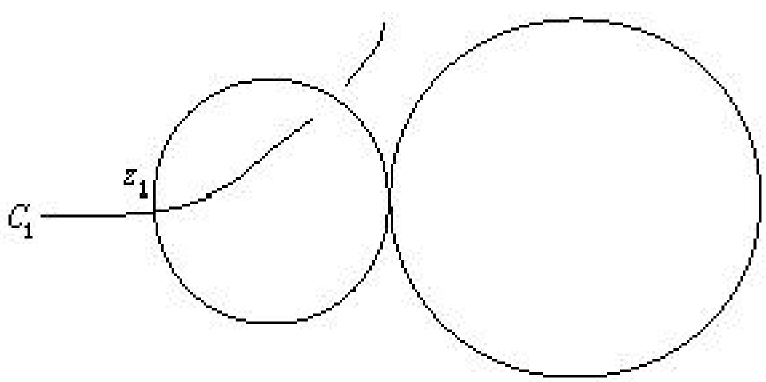

図5.21：　マークトポイント上でのバブル

この時非斉次項は図右側の球面に対してだけ付いている。この次元を勘定しよう。再び Weakly monotone と仮定すると，$\phi_{c^1}(B)\geq 0$ としてよい。$B=mB'$，B' はprimitiveとして

$$
\mathcal{M}_{0,B'}(M;C_1;0)=\left\{\varphi \,\middle|\, \begin{array}{l} \bar\partial\varphi=0, \\ \varphi(z_1)\in C_i \\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1])=B' \\ \varphi \text{ is somewhere injective} \end{array}\right\}
$$

と定義する。右側のモヂュライは$\mathcal{M}_{A'}(M;C_2,\cdots,C_k;g)$である。

（5.22）
$$
\dim\mathcal{M}_{A'}(M;C_2,\cdots,C_k;g)=\dim M+2\phi_{c^1}(A')-\sum_{i=2}(\dim M-\dim C_i)
$$

であった。一方

（5.23）
$$
\dim\mathcal{M}_{0,B'}(M;C_1;0)=\dim M+2\phi_{c^1}(B')-\left(\dim M-\dim C_1\right)
$$

である。ただしこの空間上には１点を止める共形同型の群（４次元）が自由に作用している。

さて$\mathcal{M}_{A'}(M;C_2,\cdots,C_k;g)$の元$\varphi'$と$\dim\mathcal{M}_{0,B'}(M;C_1;0)$の元$\varphi''$の組が$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$の元の極限として表れるための必要条件は$\varphi'(z_1)\cap\varphi''(\boldsymbol{C}P^1)\neq\emptyset$であった。従って全体の次元は

$$
\begin{aligned}
&\dim M+2\phi_{c^1}(A')-\sum_{i=2}(\dim M-\dim C_i)\\
&\quad+\dim M+2\phi_{c^1}(B')-\left(\dim M-\dim C_1\right)-4\\
&\quad+2-\dim M
\end{aligned}
$$

である。この数は$\dim\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)-2$以下である。

以上で次の定理を証明したことになる。

定理5.24(Ruan)　Mは Weakly monotone とすると，$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$に余次元２以上の空間をつけ加えてコンパクト化する事が出来る。

以上で Weakly monotone なMに対して不変量$\Phi_A^{(0,k)}([C_1],\cdots,[C_k];M)$の定義（5.10）を正当化することが出来る。もう少し仕事をすると，これが概複素構造や摂動によらずまたシンプレクティック構造の変形でも不変であることが分かる。

ルアンは$\Psi_A^{(0,k)}([C_1],\cdots,[C_k];M)$の定義の方も正当化している。このための$M$の仮定とし

てルアンが与えたものはもう少しきつくなる。これについては省略する。源論文をあたっていただきたい。

6　結合法則II

前節のように構造を定義したとき結合法則はどのようになるであろうか。結論は次の通りである。この節ではシンプレクティック多様体はいつも Weakly monotone とする。$\sum_i D_{i,1}\times D_{i,2}$が$\Delta=\{(p,p)\mid p\in M\}$とホモロガスになるように$D_{i,1},D_{i,2}$をえらんでおく。

定理6.1（Ruan-Tian）

$$\Phi_A(C_1,\cdots,C_k,C_1',\cdots,C_\ell')=\sum_B\sum_i\Phi_B(C_1,\cdots,C_k,D_{1,i})\cdot\Phi_{B'}(C_1',\cdots,C_\ell',D_{2,i})\ \square$$

これを結合法則らしく書いてみよう。前の節で定義したΦ_Aは

$$H_{i_1}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\cdots\otimes H_{i_k}(M;\boldsymbol{Z})\to\boldsymbol{Z}$$

なる写像であった。ここで

$$\sum(\dim M-i_j)=\dim M+2\phi_{c^1}(A)$$

ポアンカレ双対を使って$H_i(M;\boldsymbol{Z})\cong H^{\dim M-i}(M;\boldsymbol{Z})$と同一視するとこれは

$$H^{i_1}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\cdots\otimes H^{i_k}(M;\boldsymbol{Z})\to\boldsymbol{Z}$$
$$\sum i_j=\dim M+2\phi_{c^1}(A)$$

とみなせる。ここで最後の成分だけ特別視して$Hom(H^i(M;\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Z})\cong H^{\dim M-i}(M;\boldsymbol{Z})$を使うと

（6.2）
$$H^{i_1}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\cdots\otimes H^{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z})\to H^{i_k}(M;\boldsymbol{Z})$$
$$\sum_{j=1}^{k-1}i_j-2\phi_{c^1}(A)=i_k$$

が得られる。$Hom(H^i(M;\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Z})\cong H^{\dim M-i}(M;\boldsymbol{Z})$はねじれのところで成り立たないが，この点は本当は定義に戻れば，やはりこれが$H^{i_1}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\cdots\otimes H^{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z})\to H^{i_k}(M;\boldsymbol{Z})$が定義されていることが分かる。というのは前節で構成したのはチェインレベルの写像であったから，

$$\Phi_{A,k} : \hat{C}^{geo}_{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes \hat{C}^{geo}_{i_k}(M;\boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{Z}$$

であるがこれから,

$$\tilde{\Phi}_{A,k-1} : \hat{C}^{geo}_{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes \hat{C}^{geo}_{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z}) \to Hom(\hat{C}^{geo}_{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Z})$$

が得られる。（コ）ホモロジーを取ってポアンカレ双対を使えば, （6.2）が得られる。

これが導く写像$\tilde{\Phi}_{A,k-1} : H^{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes H^{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z}) \to H^{i_k}(M;\boldsymbol{Z})$の言葉で定理6.1を言い換えよう。ポアンカレ双対 $PD : H^i(M;\boldsymbol{Z}) \to H_{\dim M - i}(M;\boldsymbol{Z})$はチェインレベルでは$u \mapsto \sum_i u(D_{1,i})D_{2,i}$で与えられることに注意しよう。これを使うと：（ここでサイクルとそれがあらわすコホモロジー類をごっちゃに書いている。定理6.3は（コ）ホモロジーレベルで成り立つ等式である。）

定理6.3

$$\begin{aligned}&\tilde{\Phi}_A(C_1,\cdots,C_a,C'_1,\cdots,C'_b)\\ &= \sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B((C_1,\cdots,C_a,\tilde{\Phi}_{B'}(C'_1,\cdots,C'_b))\\ &= \sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B(\tilde{\Phi}_{B'}(C_1,\cdots,C_{a'}),C'_1,\cdots,C'_{b'},)\end{aligned}$$

❏

こう書くと$\tilde{\Phi}_{A,k-1} : H^{i_1}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \cdots \otimes H^{i_{k-1}}(M;\boldsymbol{Z}) \to H^{i_k}(M;\boldsymbol{Z})$を積とみなしたときの結合法則であることが明白になる。すなわち$a = 2, b = 1$とすると

$$\tilde{\Phi}_A(C_1,C_2,C') = \sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B(\tilde{\Phi}_{B'}(C_1,C_2),C')$$

$a = 1, b = 2$とすると

$$\tilde{\Phi}_A(C,C'_1,C'_2) = \sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B(C,\tilde{\Phi}_{B'}(C'_1,C'_2))$$

よって

$$\sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B(\tilde{\Phi}_{B'}(C_1,C_2),C_3) = \sum_{B+B'=A} \tilde{\Phi}_B(C_1,\tilde{\Phi}_{B'}(C_2,C_3)) \tag{6.4}$$

これは次のように考えると結合法則そのものになる。まず次のことに注意する。

補題6.5　任意の $C_1,\cdots,C_k$ と $const$ に対して $\tilde\Phi_A(C_1,\cdots,C_k)\neq 0$ になるような A で $\phi_\omega(A)<const$ となるものは有限個である。❑

これは定理5.16の（グロモフが示した）本来の形即ち

「$\bigcup_{A\ st\ \phi_\omega(A)<const}\mathcal{M}_A(M)$ の元の極限は準安定曲線の概正則写像の像である。」

を使えばでる。（すなわち $\phi_\omega(A)<const$ の範囲で A を動かしてモデュライを作っても同じコンパクト性がいえることの帰結である。）

補題6.5を使うと，第２節のようにノビコフ環 Λ_ω を導入して

$$\tilde\Phi_{k-1}: H^{i_1}(M;\Lambda_\omega)\otimes\cdots\otimes H^{i_{k-1}}(M;\Lambda_\omega)\to H^{i_k}(M;\Lambda_\omega)$$

を考えることが出来る。すなわち

$$\tilde\Phi(C_1,\cdots,C_k)=\sum_A\tilde\Phi_A(C_1,\cdots,C_k)\delta_A$$

こうすると（6.4）は結合法則そのもの，つまり

$$\tilde\Phi(\tilde\Phi(C_1,C_2),C_3)=\tilde\Phi(C_1,\tilde\Phi(C_2,C_3))$$

である。さて定理6.1の証明のアウトラインを述べよう。

これは二つのことからなる。まず

$$C^{(1)}=C_1\times\cdots\times C_k\times\Delta\times C_1'\times\cdots\times C_\ell'$$
$$C^{(2)}=\sum_i C_1\times\cdots\times C_k\times D_{1,i}\times D_{2,i}\times C_1'\times\cdots\times C_\ell'$$

なる２つの $M^{k+\ell+2}$ の中の幾何学的サイクルを取る。この二つはホモロガスである。従って $\partial C^{(3)}=C^{(1)}-C^{(2)}$ なる幾何学的サイクル $C^{(3)}$ がある。さて

$$\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)=\frac{\left\{\varphi\,\middle|\,\begin{array}{l}\bar\partial\varphi=g_1,\\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1])=B\end{array}\right\}\times\left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{k\hat{+}1}}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}P^1}$$

$$\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)=\frac{\left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\bar\partial\varphi=g_2,\\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1])=B'\end{array}\right\}\times\left(\boldsymbol{C}P^1\right)^{\ell\hat{+}1}}{\mathrm{Aut}\boldsymbol{C}P^1}$$

とおき,

$$\begin{gathered} ev_{k+1}:\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\to M^{k+1}\\ [\varphi;z_1,\cdots,z_{k+1}]\mapsto(\varphi(z_1),\cdots,\varphi(z_{k+1})) \end{gathered}$$

を考えよう。同様に$ev_{\ell+1}:\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\to M^{\ell+1}$も考える。この時

補題6.6

$$\begin{aligned} &\Big(\big((ev_{k+1})_*[\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)]\big)\times\big((ev_{\ell+1})_*[\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)]\big)\Big)\bullet[C^{(1)}]\\ &\quad=\Big(\big((ev_{k+1})_*[\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)]\big)\times\big((ev_{\ell+1})_*[\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)]\big)\Big)\bullet[C^{(2)}] \end{aligned}$$

❏

　これは大体は明らかである。（即ち右辺の交点数ホモロジー類が定義されるなら自明である。本当はコンパクト化をきちんと見なければならない。すなわち正確な主張はファイバー積

$$\left(\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\times\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\right)\times_{M^{k+\ell+2}}C^{(1)}$$

と

$$\left(\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\times\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\right)\times_{M^{k+\ell+2}}C^{(2)}$$

の符号付き位数の一致である。ここで例えば初めのファイバー積は

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\times\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\right)\times_{M^{k+\ell+2}}C^{(1)}\\ &\quad=\left\{((a,b),c)\in\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\times\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\times C^{(1)}\ \middle|\ (ev(a),ev(b))=c\right\} \end{aligned}$$

である。この議論は前節のものと同じであるので省略する。コンパクト化をきちんと考察し補題6.6を示す議論は前節と同様なので省略する。

　さて定義により（次元が0であるとき）

$\left(\left((ev_{k+1})_*[\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)]\right)\times\left((ev_{\ell+1})_*[\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)]\right)\right)\bullet[C^{(1)}]$は$\Phi_A(C_1,\cdots,C_k,C'_1,\cdots,C'_\ell)$そのものである。従って定理6.1は次の補題に帰着することになる。

補題6.7　０次元の時,

$$\bigcup_{B+B'=A}\left(\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k+1)\times\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell+1)\right)\times_{M^{k+\ell+2}}C^{(1)}$$

はあるg**にたいする**$\mathcal{M}_A(M;C_1,\cdots,C_k;g)$**に一致する。**

共形場の理論をご存じな方はこの補題がそこでのフュージョンルールと関係があることがおわかりであろう。補題の証明は evaluation map 付きの（タウベス流）はり合わせ定理にもとずく。これは次の節で扱うことにしよう。

7 Evaluation map 付きのはり合わせ定理

さてこの節の目標は補題6.7を証明することである。まずこの補題は条件の書き方など少し曖昧であるのでこれをきちんとすることから始めよう。

その為に摂動g_1,g_2,gの取り方から与える。まず$\mathcal{T}_{0,k+1}$，$\mathcal{T}_{0,\ell+1}$の元を与えておく。（これを$\Phi_B(C_1,\cdots,C_k,D_{1,i})$，$\Phi_B(C_1',\cdots,C_\ell',D_{2,i})$の定義に用いるのであった。$PSL(2;\boldsymbol{C})$同値類を取る前の代表元を$(z_1^1,\cdots,z_k^1,z_0^1)$，$(z_1^2,\cdots,z_\ell^2,z_0^2)$と取って固定しておく。$\boldsymbol{C}P^1-z_0^1$からコンパクト集合$K_1$を除いたものと$(0,\infty)\times S^1$との可微分同相，及び$\boldsymbol{C}P^1-z_0^2$からコンパクト集合$K_2$を除いたものと$(-\infty,0)\times S^1$との可微分同相をとりこれも固定する。

g_1,g_2は$\boldsymbol{C}P^1\times M$上の切断であったが，$g_1$の台が$K_1\times M$に$g_2$の台が$K_2\times M$にあるようにすることが出来る。すなわち$(0,\infty)\times S^1$，$(-\infty,0)\times S^1$に対応する部分には摂動がないように取る。

十分大きいTをとり$\boldsymbol{C}P^1-z_0^1-[T,\infty)\times S^1$と$\boldsymbol{C}P^1-z_0^2-(-\infty,-T]\times S^1$とを$\{T\}\times S^1\cong\{-T\}\times S^1$で同一視する。これにより$\mathcal{T}_{0,k+\ell+2}$の元が出来る。$g_1,g_2$は張り合わせるところで０だったから，この張り合わせたリーマン面上の摂動gを構成できる。（以上次ページの図7.1）。さて

$$\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)=\left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\bar\partial\varphi=g_1,\\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1])=B\\ \varphi(z_i^1)\in C_i,\quad i=1,\cdots,k\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C_1',\cdots,C_\ell')=\left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\bar\partial\varphi=g_2,\\ \varphi([\boldsymbol{C}P^1])=B'\\ \varphi(z_i^2)\in C_i'\quad i=1,\cdots,\ell\end{array}\right\}$$

と置こう。g_1,g_2をgenericいとるとこれらは$\dim M+2\phi_{c^1}(B)-\sum(\dim M-\deg C_i)$次元および$\dim M+2\phi_{c^1}(B')-\sum(\dim M-\deg C_i')$次元の空間である。ここからevaluation map

$$ev_1:\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)\to M,\ \varphi\mapsto\varphi(z_0^1)$$
$$ev_2:\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C_1',\cdots,C_k')\to M,\ \varphi\mapsto\varphi(z_0^2)$$

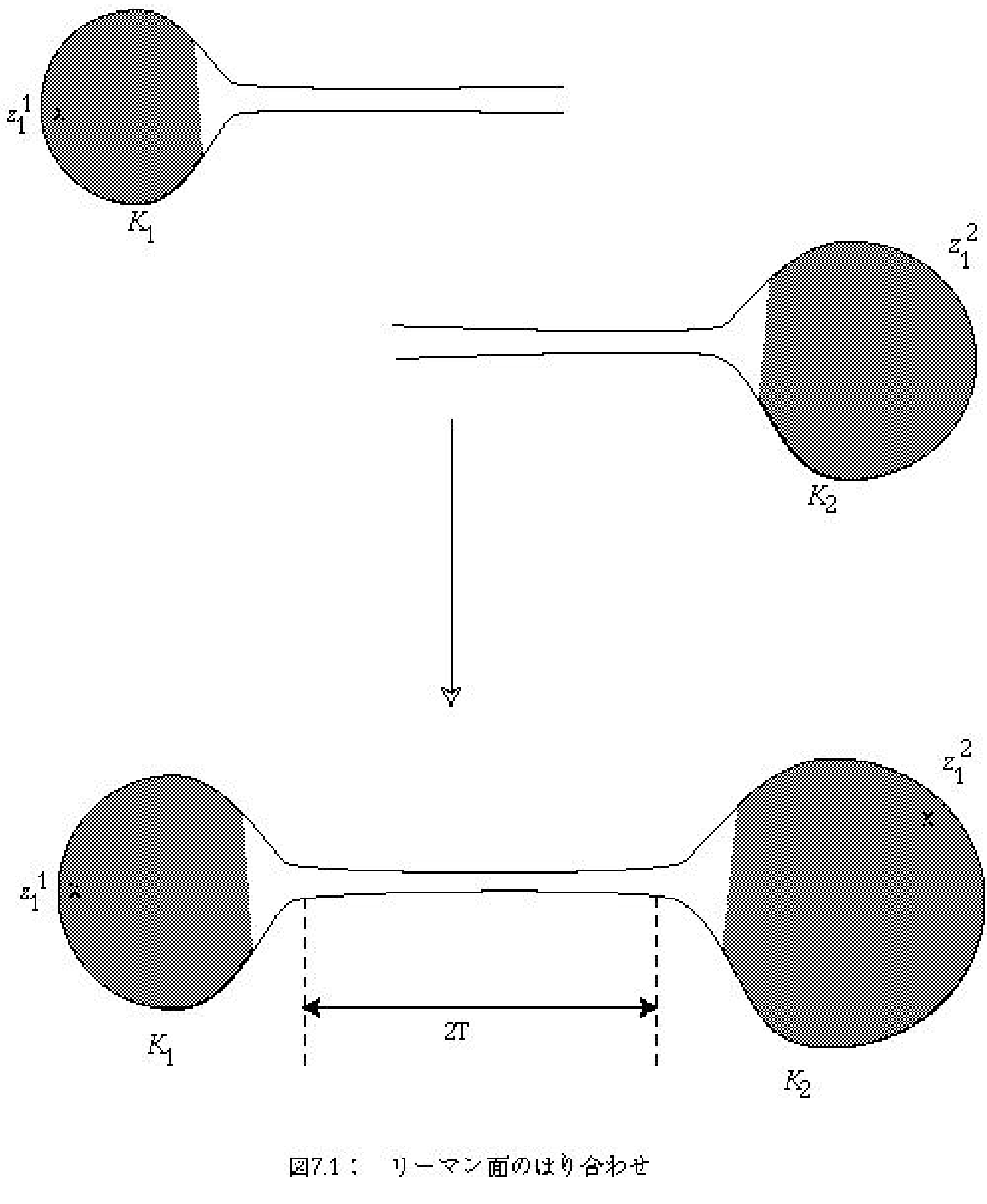

図7.1；　リーマン面のはり合わせ

を考えよう。我々の仮定は次の通りである。

仮定7.2　二つの写像 $ev_1 : \mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k) \to M,\ \varphi \mapsto \varphi(z_0^1)$ **と** $ev_2 : \mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C_1',\cdots,C_k') \to M,\ \varphi \mapsto \varphi(z_0^2)$ **は横断的である。つまり** $ev_1(a) = ev_2(b)$ **なる** (a,b) **に対して，それらの点での** ev_1 **の微分の像と** ev_2 **の微分の像の和は** $TM_{ev_1(a)}$ **を生成する。❑**

この仮定を任意の組 B, B' に対して仮定する。この時定理は次の通りである。よけいなことを気にしなくていいようにモヂュライ空間は０次元の場合に限る。つまり

$$\dim M + 2\phi_{c^1}(A) - \sum(\dim M - \deg C_i) - \sum(\dim M - \deg C_i') = 0 \tag{7.3}$$

を仮定する。

定理7.4　　仮定7.2，（7.3）の元で十分大きい T **に対して**

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_A(M,0,g,k+\ell;C_1,\cdots,C_k,C_1',\cdots,C_\ell') \\ &\quad = \bigcup_{B+B'=A} \mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k) \times_M \mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C_1',\cdots,C_\ell')\end{aligned} \tag{7.5}$$

が成り立つ。（ここで T **はリーマン面のはり合わせに使ったパラメーターで，（7.5）式の右辺は evaluation map によるファイバー積である。❑**

補題6.7が定理7.4から得られることは容易に分かる。定理7.4はゲージ理論でのタウベスのはり合わせにあたるものである。ただしここでは evaluation map があることに対応して方程式が無限遠で退化している。（４節のボット・モース関数の記述も参照。）従ってタウベスの状況より少し複雑である。ゲージ理論でこれに対応する問題はミュロフカのマイヤー・ビートリス原理によって解決する。 evaluation map の横断正則性（仮定7.2）がある我々の状況はその中では易しい方である。これはゲージ理論版では[　　]に証明を述べた。ルアン・ティアンの[　　]の証明の方法は少し考え方が違うようであるが必要な結果は出ている。マクダフ・サラモン[　　]にもこの定理の解説がある。ここでは[　　]の議論をシンプレクティック幾何に翻訳した証明のあらましを述べる。以下解析の技術的なことも出てくるのでそれに興味のない方はここで次の節に移ってもよい。

定理の証明は左辺から右辺が得られることおよびその逆である。

左辺から右辺が得られることの方が易しい。これにはまず $\varphi_T \in \mathcal{M}_A(M,0,g,k+\ell;C_1,\cdots,C_k,C_1',\cdots,C_\ell')$ を T が大きくなる列を考える。（ここで書かなかったが $\mathcal{M}_A(M,0,g,k+\ell;C_1,\cdots,C_k,C_1',\cdots,C_\ell')$ を作るときの $\mathcal{T}_{0,k+\ell}$ の元の取り方及び摂動 g は T によっている（図7.1）。さてここで $\mathcal{M}_A(M,0,g,k+\ell;C_1,\cdots,C_k,C_1',\cdots,C_\ell')$ の次元が０であるこ

とを使うと，よけいなところにマスを無駄遣いできないから，図7.1のくびれた部分 $[-T,T]\times S^1$ の一部 $[-T/2,T/2]\times S^1$ への φ_T の制限のシンプレクティック面積 $\int_{[-T/2,T/2]\times S^1}\varphi^*\omega$ は0に近づく。従ってこの部分は（指数関数的はdecay estimateも出来て） e^{-CT} 程度の直径しかない。従って φ_T の近くに大体 $\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)\times_M \mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C'_1,\cdots,C'_\ell)$ の元が見つかる。大体から本当にに移るのは横断正則性である。これが前半の要約である。

後半がタウベス流のはり合わせである。それにはまず単に1の分解ではる。これは難しくなくこれで近似解が得られる。そこで問題は近似解の近くに真の解が見つかるかどうかである。これは陰関数定理より線形化方程式が全射なら良い。しかし我々ははる前の線形化方程式は全射と仮定した。

従ってはった後もよい。というのは**嘘**である。これだと evaluation map の横断正則性がいる理由がない。もう少し真面目に考えよう。

まずはる前の図7.1のはる前の２個の図を考えよう。これを Σ_1,Σ_2 と書こう。この上のコーシーリーマン作用素（摂動された）の線形化作用素を考えるのだが，関数空間をどうとろう？はった後と相性がいいようにリーマン面の計量は図の通りつまり z_i^0 が無限遠にあるように取る。そこで

$$\bar\partial:\Gamma(\Sigma_i;\varphi_i^*TM)\to\Gamma(\Sigma_i;\Lambda^{0,1}(\Sigma_i)\otimes\varphi_i^*TM) \tag{7.6}$$

が線形化作用素である。（ $\varphi_i:\Sigma_i\to M$ は $\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)$, $\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C'_1,\cdots,C'_\ell)$ の元。）これは例えば $L^2_{m+1}\to L^2_m$ ぐらいで全射であろうか？（ここで L^2_m は m 回微分まで L^2 であるソボレフ空間。）これはそうではない。幾何学的意味を考えると， $L^2_{m+1}\to L^2_m$ ぐらいで全射であるのは， z_i^0 の行き先を止めてしまったモヂュライ空間 $\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)$ の部分空間に横断正則性が成り立っているときである。これは成り立っていない。（二つのリーマン面をはる M の点は動き回る。）そこで次のような空間を取る。

$$L^{2+}_m(\Sigma_1;\varphi_1^*TM)=\left\{(u,V)\in\Gamma(\Sigma_1;\varphi_1^*TM)\times T_{\varphi(z_1^0)}M \;\middle|\; \begin{array}{l} u-\chi V\in L^2_m(\Sigma_1;\varphi_1^*TM) \\ u(z_j^1)\in T_{\varphi_1(z_j^1)}(C_j)\end{array}\right\} \tag{7.7}$$

ここで χ はコンパクト集合 K_1 上で０無限遠で１になる Σ_1 上の関数。また V は $\Gamma(\Sigma_1-K_1;\varphi_1^*TM)$ の元とみなしている。 $\varphi_1(\Sigma_1-K_1)$ は１点でないが $\Sigma_1-K_1\cong(0,\infty)\times S^1$ を使って $T_{\varphi_1(z_1^0)}M$ と $T_{\varphi_1(x,s)}M$ を第二成分が一定のパスに沿った平行移動で同一視する。 $L^{2+}_k(\Sigma_2;\varphi_2^*TM)$ も同様に定める。

ここで（7.7）の V が z_i^0 の行き先の動く方向である。また（7.7）の２行目の条件は z_j^1（

$j=1,\cdots,k$）がC_j方向に移動することを意味する。

従って横断正則性の仮定から次のことが分かる。

補題7.8　$\bar\partial : L^{2+}_{m+1}(\Sigma_i;\varphi^*TM) \to L^2_m(\Sigma_i;\Lambda^{0,1}(\Sigma_i)\otimes\varphi^*TM)$ **は全射である。**❑

ただしここで使った横断正則性はまだそれぞれの$\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)$，$\mathcal{M}_{B'}(M,0,g_2,\ell;C'_1,\cdots,C'_\ell)$の横断正則性であって，evaluation map の横断正則性はまだ使っていない。

補題7.8の作用素を$\bar\partial_i^m$と書こう。$i=1,2$，mは十分大きく取って固定する。すると上に述べたことから

$$\ker\bar\partial_1^m = T_{\varphi_1}\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k)$$

が成り立つ。さてこの時ev_iの微分は容易にあらわせて，$(u,V)\mapsto V$である。さて次の（複雑な）図式を考える。これはマイアー・ビートリスの完全系列の証明を解析でやっているようなものである。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker(Dev_1+Dev_2) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\pi+\pi) \arrow[r] \arrow[d] & \begin{matrix} L^2_m(\Sigma_1;\Lambda^{0,1}(\Sigma_1)\otimes\varphi_1{}^*TM) \\ \oplus L^2_m(\Sigma_2;\Lambda^{0,1}(\Sigma_2)\otimes\varphi_2{}^*TM) \end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "identity"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \begin{matrix} T_{\varphi_1}\mathcal{M}_B(M,0,g_1,k;C_1,\cdots,C_k) \\ \oplus T_{\varphi_2}\mathcal{M}_B(M,0,g_2,\ell;C'_1,\cdots,C'_\ell) \end{matrix} \arrow[r] \arrow[d, "Dev_1+Dev_2"] & \begin{matrix} L^{2+}_{m+1}(\Sigma_1;\varphi_1{}^*TM) \\ \oplus L^{2+}_{m+1}(\Sigma_2;\varphi_2{}^*TM) \end{matrix} \arrow[r, "\bar\partial_1^m\oplus\bar\partial_2^m"] \arrow[d, "\pi+\pi"] & \begin{matrix} L^2_m(\Sigma_1;\Lambda^{0,1}(\Sigma_1)\otimes\varphi_1{}^*TM) \\ \oplus L^2_m(\Sigma_2;\Lambda^{0,1}(\Sigma_2)\otimes\varphi_2{}^*TM) \end{matrix} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{\varphi_1(z_1^0)}M \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & T_{\varphi_1(z_1^0)}M \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

図式7.9の完全性は上から２行目（$\ker(Dev_1 + Dev_2)$が出てくる行）以外は成り立っている。（縦２列目の完全性が evaluation map の横断正則性である。）これから上から２行目の完全性が出る。

これはなにをいっているであろうか？これは$L^2_m(\Sigma_1;\Lambda^{0,1}(\Sigma_1)\otimes\varphi_1{}^*TM)\oplus L^2_m(\Sigma_2;\Lambda^{0,1}(\Sigma_2)\otimes\varphi_2{}^*TM)$である任意のペア$w_1, w_2$に対して$L^{2+}_{m+1}(\Sigma_1;\varphi_1{}^*TM)\oplus L^{2+}_{m+1}(\Sigma_2;\varphi_2{}^*TM)$の元$((u_1,V_1),(u_2,V_2))$であって境界値が等しいつまり$V_1 = V_2$かつ$\bar\partial u_i = w_i$なるものが存在することを意味する。

ここで$\varphi = \varphi_1\#\varphi_2$を$\varphi_1$と$\varphi_2$を（１の分解で安直に）張り合わせた$\varphi:\Sigma\to M$なる写像とする。これに対して$\bar\partial : L^2_{m+1}(\Sigma;\varphi^*TM)\to L^2_m(\Sigma;\Lambda^{0,1}(\Sigma)\otimes\varphi^*TM)$が全射であることを証明したいのだった。（$\Sigma$はコンパクトであるから境界条件はいらない。）

これが上のこととどう関わるか，大体をいうと$L^2_m(\Sigma;\Lambda^{0,1}(\Sigma)\otimes\varphi^*TM)$は$L^{2+}_{m+1}(\Sigma_1;\varphi_1{}^*TM)\oplus L^{2+}_{m+1}(\Sigma_2;\varphi_2{}^*TM)$で$L^2_{m+1}(\Sigma;\varphi^*TM)$は$L^{2+}_{m+1}(\Sigma_1;\varphi_1{}^*TM)\oplus L^{2+}_{m+1}(\Sigma_2;\varphi_2{}^*TM)$の元$((u_1,V_1),(u_2,V_2))$であって境界値が等しいものに対応する。従って図式7.9の上から２行目の完全性が求める線形化方程式の全射性である。以上のことを数学的にきちんとするやり方はいろいろ考えられる。[MS]では$L^p_1\to L^p$が使われている。（$L^2_{m+1}\to L^2_m$のかわりに。）筆者が[Fu2]で用いたのは交代法である。

細かいところはかなりはしおってしまったが，[RT],[MS]を見ていただきたい。（あるいはD章に述べるかもしれない。

8　二つの環構造の一致

第２節及び６節でノビコフ環Λ_ωに係数を持つ Weakly monotone シンプレクティック多様体Mのコホモロジー$H^*(M;\Lambda_\omega)$にたいする「量子カップ積」を２通り定義した。この二つの積が一致することがこの節で述べる定理である。

定理8.1（Piunikhin）フレーアーホモロジー上の第２節の積構造とグロモフ・ウィッテン不変量から定まる積構造は一致する。

この定理は様々な人によって考えられていたと思われるが，これを明確に述べて証明の要点を示したのはピウニキン[P]である。証明の要点は一言でいって0はボット・モース関数であるということである。

定理を証明するのにまず状況を明確にしよう。f_1,f_2,f_3を Weakly monotone シンプレクティック多様体Mの３つのモース関数とする。それぞれに対してフレーアーによる複体$C(M;f_i)$が定まる（２節）。Mの幾何学的チェインの作る複体$C_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})$を考えよう。

まずするのは$C(M;f_i)$と$C_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})$の間のチェインホモトピー同値を作ることである。（これはフレーアーホモロジーがふつうのホモロジーに一致することの含んでいる。もっとも本稿ではsによらないハミルトニアンしか使っていないのでこれはほとんど明らかである。しかし同じ証明でsによるハミルトニアンも扱える。）これは次のようにして行う。

まずf_i^tをM上の関数の族で$t<-1$で$f_i^t=f_i$，$t>1$で$f_i^t=0$なるものとする。　これは後に取り替えて generic に取る。$\boldsymbol{C}P^1-0$から∞の近傍を除いたものと$(-\infty,0)\times S^1$との複素同型を選んで置く。これを使って$\boldsymbol{C}P^1-0$からMへの写像φに対する微分方程式を次のように定める。

$$
(8.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_i^t & \text{on } (-\infty,0)\times S^1 \\ J\varphi=\varphi J & \text{on a neighborhood of } \infty \end{cases}
$$

これを使って，f_iの臨界点pと$A\in\Lambda$に対してモデュライ空間$\mathcal{M}_A(p,M;f_i)$を次の式で定める。

(8.3)
$$\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)=\left\{\varphi:\boldsymbol{C}P^1-0\to M\ \middle|\ \begin{array}{l}\varphi \text{ satisfies (8.2)}\\ \lim_{t\to-\infty}\varphi(t,s)\equiv p\\ [\varphi]=A\end{array}\right\}$$

このモデュライ空間に対して必要な性質を列挙しよう。

補題8.4　**f_i^tをgenericに取れば$\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$は滑らかな多様体になり，その次元は$\mu(p)+2\phi_{c^1}(A)$である。**

ここで$\mu(p)$はpのモース指数である。補題の次元の計算は次のように考えればよい。まず$A\in\Lambda$を入れ替えると$2\phi_{c^1}(A)$の分だけ次元が変わるのは指数の計算であり比較的容易である。そこで$A=0$の場合を考えると$\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$は完全に退化したものつまりS^1方向に自明なものだけである。この時は従って$\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$の次元は$-\mathrm{grad}\ f_i$の不安定多様体の次元に一致しつまり$\mu(p)$である。

次にこの空間をコンパクト化しなければならない。

補題8.5　**$\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$はコンパクト化$C\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$をもち$C\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)-\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$は$C\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$で余次元が2の空間をのぞき$\overline{\mathcal{M}}_B(p,q;f_i)\times\mathcal{M}_{A-B}(q,M;f_i^t)$の和で与えられる。**
❏

ここで$\overline{\mathcal{M}}_A(p,q;f_i)$は

$$\overline{\mathcal{M}}_A(p,q;f_i)=\left\{t\mapsto\ell_t\ \middle|\ \begin{array}{l}\ell_t\in\Omega M,\\ \lim_{t\to-\infty}\ell_t(s)=p,\quad \lim_{t\to+\infty}\ell_t(s)=q\\ (s,t)\mapsto\ell_t(s)\text{ represents an element of }A\\ \dfrac{\partial\ell_t}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\ell_t}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_i\end{array}\right\}$$

で定義される空間であり，これがフレーアーホモロジーの境界作用素の定義に使われた。この補題の証明はすでに何回も出てきた議論の繰り返しで新味はないからここでは省略する。

写像$ev:\mathcal{M}_A(q,M;f_i^t)\to M$を$ev(\varphi)=\varphi(\infty)$で定義しよう。この写像は$C\mathcal{M}_A(p,M;f_i^t)$に拡張する。

つぎに$\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})$でこれら全てと横断的な幾何学的チェイン全体の作る部分複体とする。

補題8.6　$\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}) \to C^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$ **はホモロジーに同型を導く。❑**

これは単なる横断正則性定理である。
さて以上のことを使って写像

$$\Psi_{f_i^t} : C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$$

を定義しよう。これは

$$\Psi_{f_i^t}([p])(C) = \sum_A \#\left(\mathcal{CM}_A(p,M;f_i^t)\times_M C\right)\delta_A \tag{8.7}$$

をΛ_ω線形に拡張すればよい。ただし（8.7）での総和は$\mathcal{CM}_A(p,M;f_i)\times_M C$が0次元になる$A$をわたる。この（8.7）の右辺が$\Lambda_\omega$を決めた完備化に属することは，前節同様シンプレクテッィク面積が有界な概正則曲線のモデュライのコンパクト性定理の帰結である。
さてここで大事なことは

命題8.8 $\Psi_{f_i^t} : C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$ **はチェイン写像である。❑**

証明は補題8.5から得られる。さらに

命題8.9 $\Psi_{f_i^t} : C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$ **はチェインホモトピーを除き** f_i^t **の取り方によらない。❑**

この辺の証明はフレーアーホモロジーの定義が摂動によらないなどというのを示すのと同じであり，今となってはその方面では常識である。
ここで写像$\Psi_{f_i^t}$のdegreeについてちょっと触れておこう。
我々は横断正則性を全て仮定していたから，（8.7）の総和は$\mu(p)+2\phi_{c^1}(A)+\deg C=\dim M$なる総和である。従って$\delta_A$の次数を$\hat{C}^{geo}_k(M;\boldsymbol{Z})$の元を$2\phi_{c^1}(A)$次に取ると，これは$2\phi_{c^1}(A)+\deg C=\dim M-\eta(p)$ゆえ，ポアンカレ双対$H_k(C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega)\cong H^{n-k}(C(M;f_i);\Lambda_\omega)$と合成すれば$\Psi_{f_i^t}$はコホモロジーの間の次数を保つ写像である。すなわち

$$\left(\Psi_{f_i^t}\right)_* : H_k(C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega)\cong H^{\dim M-k}(C(M;f_i);\Lambda_\omega)\to H^{\dim M-k}(\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega) \tag{8.10}$$

さて我々はこの写像が同型であることを証明したい。このために逆を構成しよう。その為には$\boldsymbol{C}P^1-\infty$から0の近傍を除いた集合と$(0,\infty)\times S^1$の間の複素同型をとり，

（8.11）
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} - \mathrm{grad}\ f_i^{-t} & \text{on } (0,\infty)\times S^1 \\ J\varphi = \varphi J & \text{on a neighborhood of } 0 \end{cases}$$

なる方程式を取り

$$\mathcal{M}_A(M,p;f_i) = \left\{ \varphi : \boldsymbol{C}P^1 - \infty \to M \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ satisfies (8.11)} \\ \lim_{t\to\infty} \varphi(t,s) \equiv p \\ [\varphi] = A \end{array} \right\}$$

と定義する。これを使って$\Psi'_{f_i^{-t}} : \hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z}) \to C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega$を

（8.12）
$$\Psi'_{f_i^{-t}}(C) = \sum_{A,p} \#\left(C \times_M C\mathcal{M}_A(M,p;f_i^{-t})\right)\delta_A[p]$$

と置く。

補題8.13　$\Psi'_{f_i^{-t}} : \hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z}) \to C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega$ **はチェイン写像である。❑**

さて次に以下の命題を示せば（8.10）が同型を与えることが分かる。

命題8.14　　**次の図式はチェインホモトピーを除いて可換である。**

（8.15）
$$\begin{array}{ccc} Hom(\hat{C}''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega) & \xleftarrow{\Psi_{f_i^t}} & C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega \\ \uparrow & & \uparrow identity \\ \hat{C}'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega & \xrightarrow{\Psi'_{f_i^{-t}}} & C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega \end{array}$$

❑

ここで$\hat{C}'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$と$\hat{C}''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$はいずれも$C_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})$の部分複体で，そのホモロジーは$C_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})$のホモロジーと同型で，また evaluation map たちとは横断的で，さらに$\hat{C}'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$のサイクルと$\hat{C}''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$のサイクルは横断的であるように選ぶ。（技術的な理由で有限生成にしておく。）このような部分複体の存在することの証明は，要するにポアンカレ双対の証明である。

この時図式（8.15）の縦の写像$\hat{C}'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat{C}''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$は$C \mapsto (C' \mapsto C\bullet C')$を$\Lambda_\omega$線形に拡張したもので，交点ペアリングまたはポアンカレ双対で

ある。この写像をPDと書こう。

命題8.14の証明の粗筋を述べる。この辺をちゃんとかいたものがないのである程度ちゃんとした証明らしいものを書く。細かい点に興味がなければ命題8.14は認めて式（8.22）のところまで飛ばしてもよい。

$\chi_T : \boldsymbol{R} \to C^\infty(M)$ を

（8.16）
$$\chi_T(t) = \begin{cases} f_i^{-t-2T} & t < -T \\ f & t \in [-T, T] \\ f_i^{t-2T} & t > T \end{cases}$$

で定め，$\varphi : S^1 \times \boldsymbol{R} \to M$ にたいする方程式

（8.17）
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -J \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \mathrm{grad}\ \chi_T(t)$$

を考えよう。$|t| > T$ で $\chi_T(t) \equiv 0$ ゆえ無限遠では（8.17）は概複素曲線の方程式である。従って$\int_{S^1 \times \boldsymbol{R}} \varphi^* \omega < \infty$ であれば無限遠でφは１点に収束する。よって$\int_{S^1 \times \boldsymbol{R}} \varphi^* \omega < \infty$ であるような（8.17）の解は$\pi_2(M)$の元（あるいは）Λ の元を定める。これを念頭に置いて

$$\mathcal{M}_A(\chi_T) = \left\{ \varphi \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi \text{ satisfies (8.17)} \\ [\varphi] = \mathrm{A} \end{array} \right\}$$

と置こう。これから二つの evaluation maps

$$ev_l : \mathcal{M}_A(\chi_T) \to M,\ \varphi \mapsto \lim_{t \to -\infty} \varphi(t,s)$$
$$ev_r : \mathcal{M}_A(\chi_T) \to M,\ \varphi \mapsto \lim_{t \to +\infty} \varphi(t,s)$$

が定まる。$C' \in \hat{C}'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$，$C'' \in \hat{C}''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})$ に対して，

（8.18）
$$\Xi_T(C', C'') = \sum_A \#\left(C' \times_M \mathcal{M}_A(\chi_T) \times_M C''\right) \delta_A \in \Lambda_\omega$$

と置く。ここで

$$C' \times_M \mathcal{M}_A(\chi_T) \times_M C'' = \left\{ (p, \varphi, q) \in C' \times \mathcal{M}_A(\chi_T) \times C'' \,\middle|\, \begin{array}{l} p = ev_l(\varphi) \\ q = ev_r(\varphi) \end{array} \right\}$$

で，また（8.18）の総和はこの空間が０次元である A 全体で取る。

補題8.19 Ξ_T **は** $\hat\Xi_T : \hat C'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat C''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$ **なるチェイン写像を導く。❑**

証明は再び「常識」である。

補題8.20　十分大きい T **に対して** $\hat\Xi_T = \Psi_{f_i^t}\circ\Psi'_{f_i^{-t}}$ ❑

これはモヂュライ空間の同一視から分かる。すなわち十分大きい T にたいして

$$\bigcup_p \left(C'\times_M \mathcal{M}_A(M,p;f_i)\right)\times\left(\mathcal{M}_A(p,M;f_i)\times_M C''\right) = C'\times_M \mathcal{M}_A(\chi_T)\times_M C''$$

であることから従う。

さて命題8.14の証明を完成するには次の補題を示せばよい。

補題8.21　$\hat\Xi_T$ **と** PD **はチェインホモトピー同値である。❑**

この証明は要するに，命題8.9の後半の証明と同じである。すなわち，$\chi_{T,u}:\boldsymbol{R}\to C^\infty(M)$，$u\in[0,1]$ なるホモトピーを $\chi_{T,0}=\chi_T$，$\chi_{T,1}\equiv 0$ なるように取ろう。各々の $\chi_{T,u}$ に対してモヂュライ空間 $\mathcal{M}_A(\chi_{T,u})$ が決まる。これを使って

$$\Theta_T(C',C'') = \sum_A \#\left(C'\times_M \bigcup_u \mathcal{M}_{A,u}(\chi_T)\times_M C''\right)\delta_A \in \Lambda_\omega$$

と定義する。これは+1次の写像 $\hat\Theta_T : \hat C'^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega \to Hom(\hat C''^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z}),\Lambda_\omega)$ を導く。ところで $\chi_{T,1}\equiv 0$ ゆえ

$$\sum_A \#\left(C'\times_M \mathcal{M}_{A,1}(\chi_T)\times_M C''\right)\delta_A = C'\bullet C''$$

が分かる。（ここで右辺は交点数。）従って

$$\begin{aligned}\partial\left(C'\times_M\bigcup_u\mathcal{M}_{A,u}(\chi_T)\times_M C''\right) \quad = \quad & \left(\partial C'\times_M\bigcup_u\mathcal{M}_{A,u}(\chi_T)\times_M C''\right)\\ & \pm\left(C'\times_M\bigcup_u\mathcal{M}_{A,u}(\chi_T)\times_M \partial C''\right)\\ & \pm C'\times_M \mathcal{M}_{A,0}(\chi_T)\times_M \partial C''\\ & \mp C'\times_M \mathcal{M}_{A,1}(\chi_T)\times_M \partial C''\end{aligned}$$

ゆえ$\hat{\Xi}_T - PD = \hat{\Theta}_T\partial \pm \partial\hat{\Theta}_T$となって証明が完成する。コンパクト化だの横断正則性だのをきちんと考えると結構うるさいけれどそれは省略しよう。

さてやっと同型がつくれた。これを使えば次のように定理8.1を言い換えることが出来る。$\Psi'_{f_i^{-t}}:\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})\to C(M;f_i)\otimes\Lambda_\omega$が導くホモロジーの同型を

$$I_i : H(\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z});\Lambda_\omega)\to H(C_*(M;f_i);\Lambda_\omega) \tag{8.22}$$

とあらわそう。

定理8.2　$\hat{Q}(I_1(C_1),I_2(C_2)) = I_3(\hat{\Phi}(C_1),\hat{\Phi}(C_2))$❑

ここで左辺の$\hat{Q}$は２節の右辺の$\hat{\Phi}$は６節のものである。

注　同様にして量子マッセイ積の一致もいえる。

定理の証明のあらましを述べよう。$\boldsymbol{C}P^1-\infty$から0を中心とした半径２の円盤を除いた集合と$(0,\infty)\times S^1$の間の複素同型をとる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} - \mathrm{grad}\ f_3^{-t} & \text{on } (0,\infty)\times S^1\\ J\varphi = \varphi J & \text{on a neighborhood of } D^2\end{cases} \tag{8.24}$$

の解の空間を考える。すなわち

$$\mathcal{M}_A(M,M,p;f_3) = \left\{\varphi:\boldsymbol{C}P^1-\infty\to M \,\middle|\, \begin{array}{l}\varphi\text{ satisfies (8.24)}\\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t,s)\equiv p\\ [\varphi]=A\end{array}\right\}$$

と置く。

$$ev_0 : \mathcal{M}_A(M,M,p;f_3) \to M\,,\quad \varphi \mapsto \varphi(0)$$
$$ev_1 : \mathcal{M}_A(M,M,p;f_3) \to M\,,\quad \varphi \mapsto \varphi(1)$$

としよう。写像

$$\mathrm{Z} : \hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z}) \otimes \hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z}) \to C_*(M;f_3) \otimes \Lambda_\omega$$

を次の式で定義する。

$$\mathrm{Z}(C_1,C_2) = \sum_{A,p} \#\left(\left\{(x,y,\varphi) \in C_1 \times C_2 \times \mathcal{M}_A(M,M,p;f_3) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = ev_0(\varphi) \\ y = ev_1(\varphi) \end{array}\right\}\right) \delta_A[p]$$

証明の方針はこれが定理8.24の両方と等しいことを示すことである。このためにはリーマン面$\boldsymbol{C}P^1 - \{0,1,\infty\}$を二通りにちぎる。即ち図8.25のリーマン面を図8.26と図8.27のようにちぎる。このちぎり方に３節の結合法則の証明を適用すると定理が証明される。

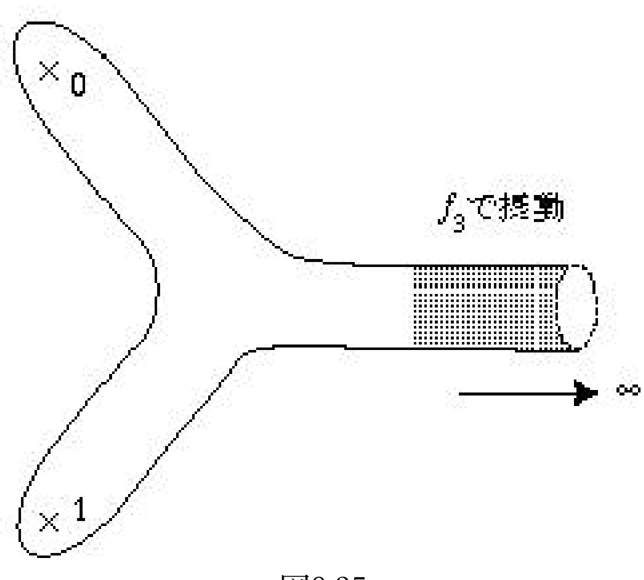

図8.25

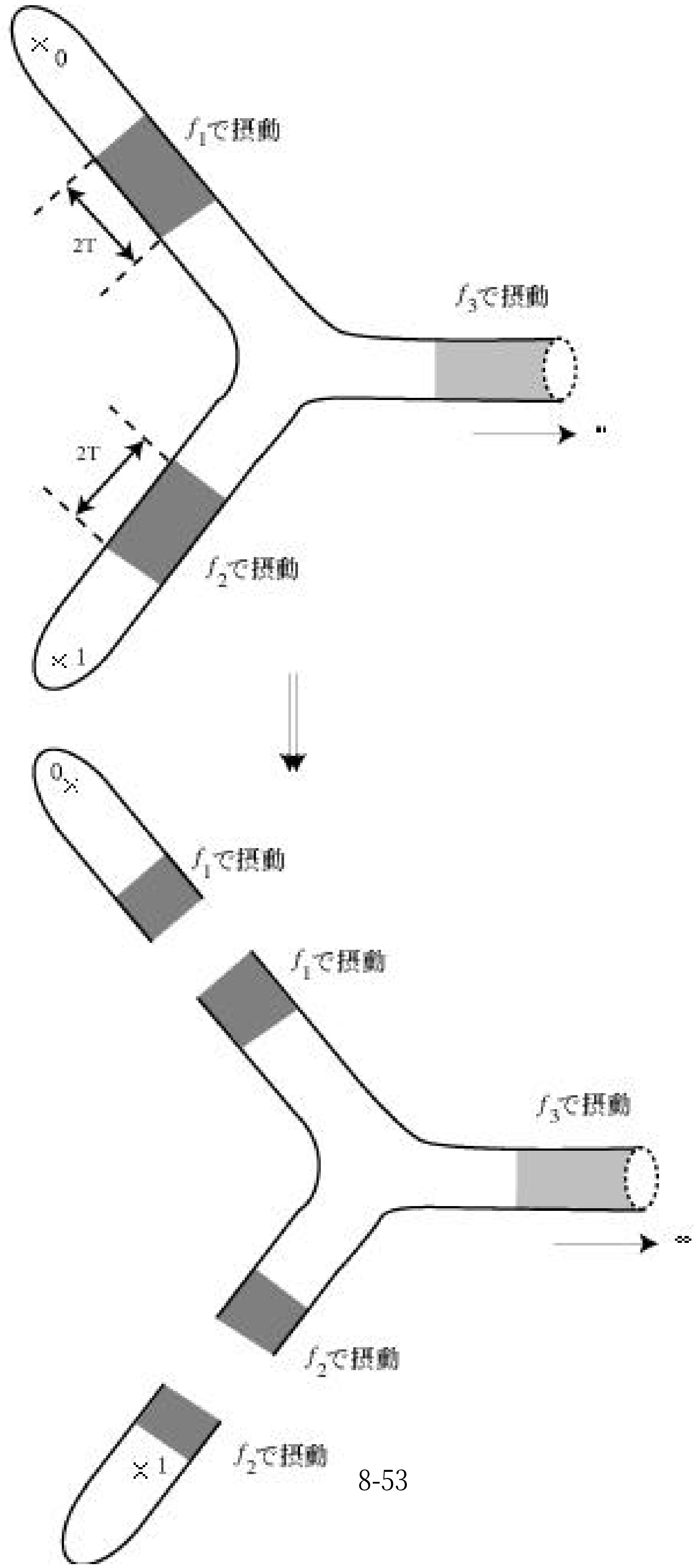

図8.26

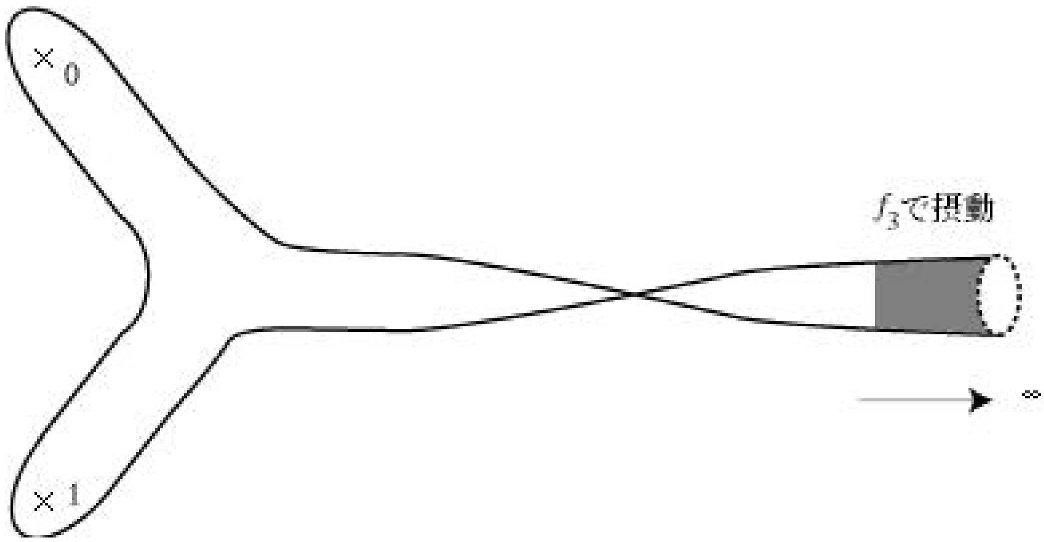

図8.27

もう少し正確にいうと次の通りである。方程式（8.24）を次のようにずらす。

0の近傍から0をのぞいたものと$S^1\times(-\infty,0)$との共形同値及び1の近傍から1をのぞいたものと$S^1\times(-\infty,0)$との共形同値を選んで置く。これらの近傍をそれぞれU_1,U_2と書く。方程式の方は次ののように書き換えられる。

$$
(8.28)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_3^{-t} & \text{on } S^1\times[0,\infty) \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_1^{\upsilon(t)} & \text{on } \mathrm{U}_1 \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_2^{\upsilon(t)} & \text{on } \mathrm{U}_2 \\
J\varphi=\varphi J & \text{elsewhere}
\end{cases}
$$

ここで$\upsilon(t)$は次の図の通り

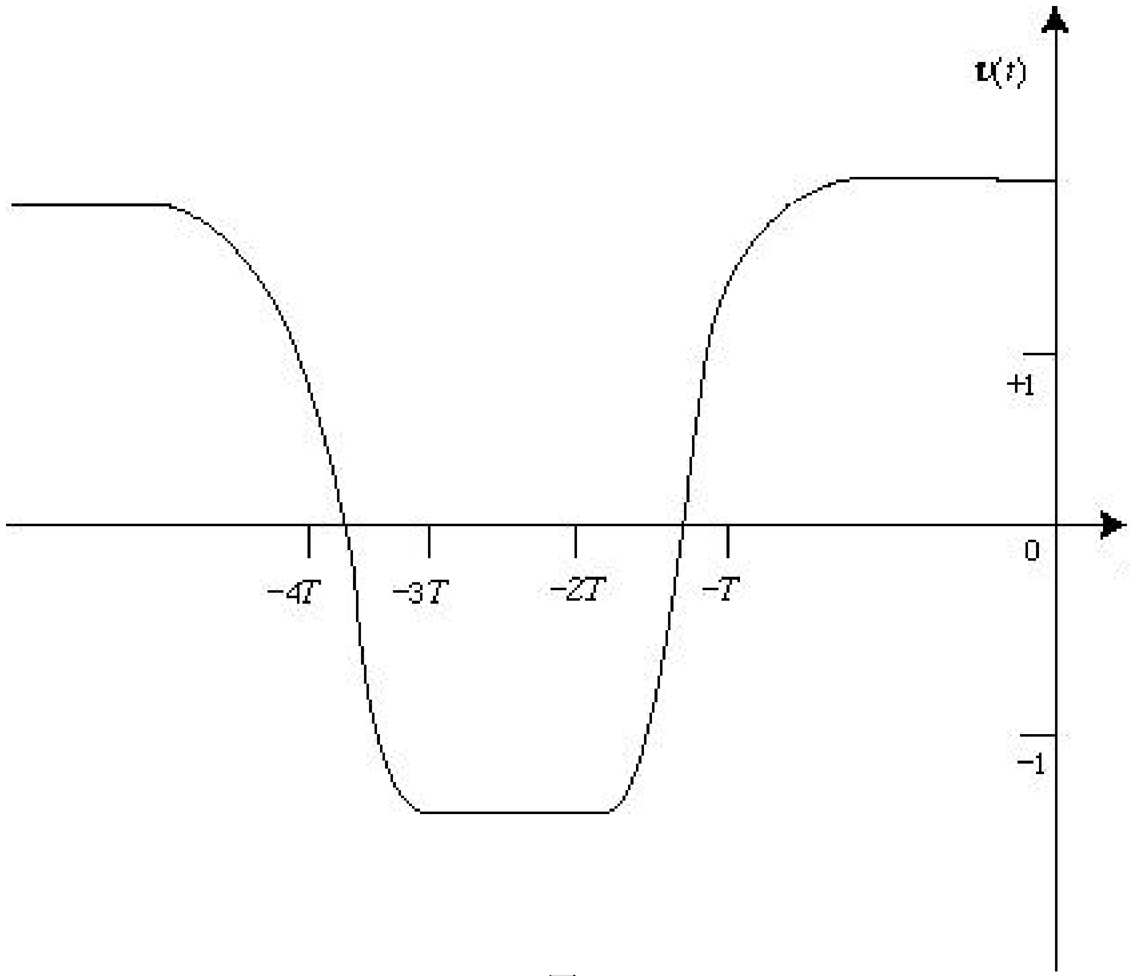

図8.29

この解空間で$\infty\in \boldsymbol{CP}^1$で$\infty\in \boldsymbol{CP}^1$で$p$に収束するもので$A\in\Lambda$なるホモロジー類をあらわすもの全体を$\mathcal{M}_A(M,M,p;f_3,T)$と書く。すなわち$\mathcal{M}_A(M,M,p;f_3)$の定義で方程式を（8.24）から（8.28）に取り替えたものである。

$$Z_T(C_1,C_2)=\sum_{A,p}\#\left(\left\{(x,y,\varphi)\in C_1\times C_2\times\mathcal{M}_A(M,M,p;f_3,T)\;\middle|\;\begin{matrix}x=ev_0(\varphi)\\ y=ev_1(\varphi)\end{matrix}\right\}\right)\delta_A[p]$$

と置く。

補題8.30　　Z_TとZは$\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\hat{C}^{geo}_*(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega\to C_*(M;f_3)\otimes\Lambda_\omega$なる写像としてチェインホモトピー同値である。❏

何回もやったからこの辺は当たり前に見えてきたでしょ。次は

補題8.31　　十分大きいTに対して$Z_{\vartheta_T}(C_1,C_2)=\hat{Q}(I_1(C_1),I_2(C_2))$❑

これはチェインレベルの等式である。証明はモヂュライ空間の一致：

$$\left\{(x,y,\varphi)\in C_1\times C_2\times\mathcal{M}_A(M,M,p;f_3,T)\,\middle|\,\begin{array}{l}x=ev_0(\varphi)\\ y=ev_1(\varphi)\end{array}\right\}$$
$$=\bigcup_{\substack{p_1\in Cr(f_1)\\ p_2\in Cr(f_2)}}\ \bigcup_{B_1+B_2+B_3=A}\left(C_1\times_M\mathcal{M}_{B_1}(M,p_1;f_1^T)\right)\times\left(C_2\times_M\mathcal{M}_{B_2}(M,p_2;f_2^T)\right)\times\mathcal{M}_{B_3}(p_1,p_2,p)$$

である。ここで$C_1\times_M\mathcal{M}_{B_1}(M,p_1;f_1^T)$は$\Psi'_{f_1^{-t}}=I_1:\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})\to C(M;f_1)\otimes\Lambda_\omega$を作るときのモヂュライ空間である。記号がごたついてごめんなさい。

さて図8.26の方の説明は終わった。図8.27の方はこれは６節７節の evaluation map 付きのはり合わせに関わる。これにはまず方程式（8.24）を0,1,∞から離れたところで非斉次項を入れる。さらに右にTずらす。出てきた方程式は

（8.31）
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-J\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}-\mathrm{grad}\ f_3^{-t-T} & \text{on }(0,\infty)\times S^1\\ \bar{\partial}\varphi=g & \text{on a neighborhood of }D^2\end{cases}$$

この解空間を使って同じように$\mathcal{M}'_A(M,M,p;f_3,g,T)$を定義し，これから次のように定義する。

$$Z_{g,T}:\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\hat{C}_*^{geo}(M;\boldsymbol{Z})\otimes\Lambda_\omega\to C_*(M;f_3)\otimes\Lambda_\omega$$

補題8.32　　$Z_{g,T}$とZはチェインホモトピックである。❑

最後に

補題8.33　　十分大きいTに対してに対して

$$Z_{g,T}(C_1,C_2)=\sum_{i,A}\Phi_A(C_1,C_2,D_{1,i})\cdot\Psi_{f_3^t}(\delta_A D_{2,i})\text{❑}$$

これの証明は第６・７節とほぼ同じである。補題8.33から$I_3(\hat{\Phi}(C_1),\hat{\Phi}(C_2))=Z_{g,T}(C_1,C_2)$が示されるのは第６節の初めに書いた定理6.1を定理6.3に言い換える議論と同じである。

これで定理8.23の証明が完成した。

参考文献（第一次）

[A] V.Arnold, *Sur une proprietes topologique des applications globalment canonique de la mathanique classique*, CR. Acad. Sci. Paris **261** (1965) 3719 - 3722.

[AB] D.Austin,P.Braam, *Morse-Bott theory and equivariant cohomology,* preprint

[Au] M.Audin, The topology of Torus actions on Symplectic manifolds, Birkhäser 1991.

[BC] M.Betz & R.Cohen, *Graph moduli spaces and Cohomology Operations,* preprint.

[BCOV] M.Bershadsky,S.Cecotti,H.Ooguri & C.Vafa, *Kodaira-Spencere Theory of Gravity and Exact Results for Quantum String Ampritudes*, preprint

[CGPO] P.Candelas, P.Green, L.Parke & dela Ossa, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory*, Nucl. Phys. B **359** (1991) 21.

[CJS] R.Cohen, J.Jones & G.Segal, *Floer's infinite dimensional Morse theory and homotopy theory*, preprint.

[Fl] A.Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J.Differential Geom. **28** (1988) 513 - 547.

[F2] A.Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys., **120** (1989) 575 - 611

[Fu1] K.Fukaya, *Morse homotopy and its quantization,* to appear in Geogia topology conference.

[Fu2] _______ , *Floer homology for conncted sum of homology 3 shperes*, to appear in Topology.

[Fu3] _______ , *Morse homotopy, A^∞ -category and Floer homologies,* in "Proceding of the Garc Workshop on Geometry and Topology '93" ed. by H.J. Kim, Seoul National University.

[Fu4] _______ , モース理論と位相的場の理論, 数学 (1994) 289 - 307.

[G] M.Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985) 307 - 347.

[Gv] A.Givental, *Homological Geometry I, Projective Hypersurfaces,* preprint.

[GK] A.Givental & B.Kim, *Quantum cohomology of flag manigolds and Toda lattices,* preprint.

[P] R.Penner, *The decorated Teichmuller space of punctured surface,* Commun. Math. Phys. **113** (1997) 299 - 339

[HS] H.Hofer &,D.Salamon, *Floer homology and Novikov ring* , preprint.

[HZ] H.Hofer & E.Zender, Symplectic invariant and Hamilton Dynamics, Dikhäuser (1994).

[Ko1] M.Kontsevitch, *A^∞ -algebras in Mirror symmetry,* preprint.

[Ko2] _______ , *Intersection theory on the Moduli space of curves and the Matrix Airy functions,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 1- 23.

[Ko3] _______ , *Feynman diagram and low dimensional topology,* preprint.

[Ko4] _______ , *Enumeration of rational curves via torus action*, preprint.

[KM] M.Kontsevitch&Y.Mannin, *Gromov-Witten Classes, Quantum cohomology, and enumerative geometry,* preprint.

[Mr] T.Mrowka, *A local Myer-Vietris Principle for Yang-Mills moduli spaces*, Thesis Harvard (1989).

[M] D.Macduff, *Elliptic method in Symplectic geometry,* Bull. AMS **23**(2) 311 - 358 (1990).

[MS] D.Macduff & D.Salamon, J-holomorphic curves and quatum cohomology, University lecture series 6 , AMS 1994.

[Pi] S.Piunikhin, *Quantum and Floer cohomology have the same ring structure*, preprint.

[N] S.Novikov, *Multivalued functions and functionals - an analogue of the Morse theory,* Soviet Math. Dokl. **24** (1981) 222 - 225.

[O] K.Ono, *On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds*, preprint.

[R1] Y.Ruan, *Topological sigma model and Donaldson type invariant in Gromov theory*, preprint.

[R2] ________ , Symplectic topology on algebraic 3-fold, preprint.

[RT] Y.Ruan & G.Tian, *Mathemataical theory of quantum cohomology*, preprint

[V] C.Vafa, *Topological mirrors and Quantum ring*, in "Essays on Mirror manifolds" ed. S.T.Yau, International press Hong Kong 1992.

[W1] E.Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17** (1982) 661 - 692.

[W2] E.Witten, *Topological quiatum field theory*, Comm. Math. Phys.,. 117 (1988), 353 - 386.

[W3] ________ , *Topological sigma model*, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 441.

[W4] ________ , *Mirror manifolds and topological field theory*, in "Essays on Mirror manifolds" ed. S.T.Yau, International press Hong Kong 1992 120 - 158.