Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor

Osamu Fujino

1　設定と問題

設定　（半安定退化族）

X：非特異擬射影代数多様体

Y：非特異擬射影代数曲線、$P \in Y$ は Y 上の一点

$f : X \to Y$：固有全射、$Y \setminus P$ 上滑らか

f^*P は X 上の単純正規交叉因子

となるとき、$f : X \to Y$ を**半安定退化族**と呼ぶことにする。

問題　半安定退化族 $f : X \to Y$ が与えられたとき、X の Y 上の**相対的極小モデル**を構成することが出来るか？

2　主定理

定理　(半安定極小モデル理論）$f : X \to Y$ を半安定退化族とする。さらに、すべての $Q \in Y \setminus P$ にたいして

$$K_{f^{-1}Q} \sim 0$$

とする。このとき、Y 上のフリップと因子収縮射の列

$$X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_k \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_m$$

が存在し、相対的極小モデル X_m を得る。ただし、X_m は高々 $\mathbb{Q}$-分解的末端特異点しか持たず、$K_{X_m} \sim_Y 0$ である。$f_m : X_m \to Y$ の中心ファイバー $S = f_m^{-1}(P)$ はゴレンシュタインで半因子対数的末端特異点しか持たず、$K_S \sim 0$ となる。

3　補足

定理はもう少し一般的な設定で成立するが、記号の設定、用語の説明が煩雑になるので省略。詳しくは

O. Fujino, Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor, Proc. Japan Acad., **87**, Ser. A (2011), 25–30.

を参照。

注意 **定理はアーベル多様体の退化やカラビ–ヤウ多様体の退化などを念頭において証明した。**

注意 **定理は一般ファイバーが一般型代数多様体のとき、**
Birkar–Cascini–Hacon–M^cKernan **（以下** [BCHM] **と省略）の理論で解決済み。**

4　証明のアイデア

H を有効で巨大な $\mathbb{Q}$-因子で、$K_X + H$ が Y 上数値的非負で (X, H) が川又対数的末端特異点しか持たないようなものとする。

$$\lambda_i = \inf\{t \in \mathbb{Q} \,|\, K_{X_i} + tH_i \text{ は } Y \text{ 上非負}\}$$

とおいてスケール付き極小モデル理論を Y 上で走らせる。
定義より、$0 \leq \lambda_i \leq 1$ で

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq \cdots$$

となる。

Case 1. $\lambda = \lim_{i\to\infty} \lambda_i > 0$のとき、[BCHM]の理論より極小モデル理論は有限回のフリップと因子収縮射の後、停止する。

Case 2. $\lambda = \lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$とする。もし極小モデル理論が停止しないとすると、フリップの無限列が存在する。$\lambda = 0$より、KはY上movableな因子の極限と表される。一方、KはY上相対的に非負でなければ、Y上のmovable因子の極限としては書けない（cf. Zariskiの補題）。よって、極小モデル理論は有限回の操作の後、止まる。

得られた極小モデル$f_m : X_m \to Y$が目的の性質を持っていることは一般論から簡単に示せる。

5　証明への補足

今回使った証明の議論は、半安定退化族以外にも使える。双有理写像 $f : X \to Y$ に先程の議論を上手く使うと、特異点の良い性質を持った部分特異点解消を構成することが出来る。(dlt blow-up と呼ばれる部分特異点解消)

dlt blow-up はすでに非常にたくさんの応用を生み出しつつある。詳しくは次回以降の学会で。

6　背景

今回の仕事の元ネタは以下の３つである。

(1) 松下大介（北大）さんのアーベル多様体の半安定的退化の良いモデル（非特異で相対的極小モデル）の構成。

(2) 権業善範（東大）さんの（中山の意味での）数値的小平次元がゼロなる代数多様体の good minimal model の構成。

(3) 高山茂晴（東大）さんの退化の話（今回の記号で書くと、S が可約なら S のすべての既約成分は uniruled であるという類いの主張）。

これらを考慮にいれて、標準因子が自明である代数多様体の半安定的退化を極小モデル理論的に自然に解釈してみた。