高次元代数多様体の双有理分類を目指して

藤野　修

京都大学大学院理学研究科・教授

2023 年 11 月 11 日

代数多様体とは？

代数幾何学の歴史

代数多様体の双有理分類

数学者の日常

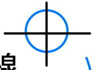
小平消滅定理の一般化

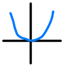
よくある疑問、質問

最後に

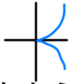
代数多様体とは？

大雑把に言うと、代数多様体とは有限個の多項式 (高校の教科書では整式ともいう) の共通零点集合のこと





- xy 平面内の円 $x^2 + y^2 - 1 = 0$、放物線 $x^2 - y = 0$、直線 $x + y + 1 = 0$、楕円 $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ などなど



- $x^3 - y^2 = 0$ は原点で特異点をもっている。
- $x^2y + xy^3 - 5 = 0$ などはどんな図形かすぐにはわからない。
- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 2x + 4y - 22 = 0 \end{cases}$$

  は xy 平面内の２直線の交わりとして一点を表している。
- xyz 空間内の球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ も代数多様体
- xyz 空間内で

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

  は球面を平面で切った切り口の円

一般には n 変数の多項式有限個

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を考え、

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

を複素 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 内で考える。これが代数多様体。例えば、

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

とか

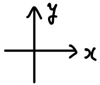
$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 3x_1^{10}x_2^8 + \sqrt{2}x_3 + (2 + \sqrt{-1})x_4^2x_5^3 \\ f_3(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 5 \end{aligned}$$

など

われわれは連立方程式 $(\star)$ の具体的な解の値に興味があるのではなく、$(\star)$ の解全体が $\mathbb{C}^n$ 内でなす幾何学図形（代数多様体）の性質に興味がある。

- 変数を増やすことは高次元（4 次元とか 5 次元とか）を考えることになる。
- $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が全て一次式のときは連立一次方程式にすぎない。
- 実数の世界 $\mathbb{R}$ でなく、複素数の世界 $\mathbb{C}$ で考える方がうまくいく。
- 実際は、$\mathbb{C}^n$ でなく、それをコンパクト化した射影空間 $\mathbb{P}^n$ を考える方が自然

代数幾何学の歴史



- 代数幾何学はデカルトにはじまる！？方法序説は 17 世紀
- 19 世紀にはリーマンによるリーマン面（1 次元の話）
- 19 世紀から 20 世紀にかけてイタリア学派による代数曲面論（2 次元の話）
- 20 世紀半ばにグロタンディークによる代数幾何学の基礎の刷新（抽象化の波）
- 1950 年代に小平邦彦が小平消滅定理を証明。その後、小平は複素解析曲面論
- 1960 年代に広中平祐による特異点解消定理の確立
- 1970 年代は飯高茂による飯高プログラム
- 1980 年ごろから森重文による森理論、極小モデル理論
- 21 世紀になっても爆発的に発展中

Figure: 小平邦彦

Figure: 広中平祐

Figure: 森重文

出典：Wikipedia

代数多様体の双有理分類

- 代数多様体論の究極目標の一つは、代数多様体を双有理的に分類すること
- 代数多様体 X と代数多様体 X' が双有理同値であるとは、X と X' は大体のところで同じものであり、一部分だけ異なる感じ
- 一般に代数多様体 X が与えられると、X には特異点と呼ばれる潰れた点や重なった点が現れる

- 広中の特異点解消定理によると、代数多様体 X に有限回爆発と呼ばれる操作を施すと、X と双有理同値な代数多様体 X' で非特異なものをつくれる
- 非特異な代数多様体 X が与えられると、有限回のフリップと因子収縮と呼ばれる操作の後、森ファイバー空間か極小モデルになると予想されている

- 広中の特異点解消定理：X は代数多様体とする。

$$X \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_i \leftarrow \cdots \leftarrow X_k$$

各ステップは爆発と呼ばれる双有理変換で、X_k は非特異代数多様体

- 極小モデル予想：X は非特異代数多様体とする。

$$X \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_k$$

各ステップはフリップか因子収縮と呼ばれる双有理変換で、各 X_i は穏やかな特異点をもった代数多様体。X_k は森ファイバー空間か極小モデル。有限回の操作で森ファイバー空間か極小モデルに到達できるのかどうかが未解決。

イメージ図を見てみましょう。

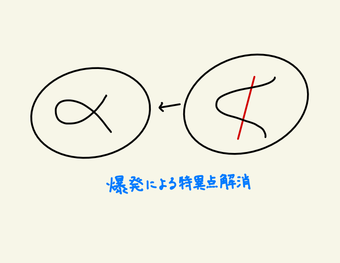


Figure: 爆発による特異点解消のイメージ

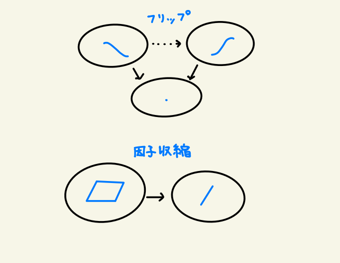


Figure: フリップと因子収縮のイメージ

数学者の日常

ちょっと休憩して、数学者の研究室をのぞいてみましょう。

Figure: 私の研究室

Figure: 京大北部構内

Figure: 数学教室

Figure: オフィスの入り口

Figure: オフィスの黒板

大学の数学科の学生のリアルな生活については

絹田村子著『数字であそぼ。』

現代数学の雰囲気を味わうにはNHKの

『笑わない数学』

小平の消滅定理の一般化

ここからは容赦無く数学の論文に書いてあるスタイルで数学の定理を述べていきます。

定理 1 (小平の消滅定理)

X をコンパクトな複素多様体とし、$\mathcal{L}$ を正な直線束とする。このとき

$$H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}) = 0$$

が $i > 0$ で成立する。

定理 2 (小平の埋め込み定理)

X をコンパクトな複素多様体とし、$\mathcal{L}$ を正な直線束とする。このとき、ある正の整数 m が存在し、線形系 $|\mathcal{L}^{\otimes m}|$ は射影空間への埋め込み

$$\Phi_{|\mathcal{L}^{\otimes m}|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

を与える。

小平の消滅定理の一般化を述べます。

定理 3 (小平の消滅定理の一般化)

(X, Δ) を単純正規交叉対とし、$f\colon X \to Y$ を固有射とする。Δ の係数は 0 以上 1 以下とする。L を X 上のカルティエ因子とし、$L - (K_X + \Delta)$ を f-半豊富と仮定する。このとき

(i) $R^q f_* \mathcal{O}_X(L)$ の任意の随伴素イデアルは、(X, Δ) のある階層の f での像の生成点である。

(ii) さらに $\pi\colon Y \to Z$ は射影射と仮定し、

$$L - (K_X + \Delta) \sim_{\mathbb{R}} f^* H$$

と仮定する。ただし、H は π-豊富な Y 上の $\mathbb{R}$-因子と仮定する。このとき、

$$R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{O}_X(L) = 0$$

が任意の $p > 0$ と q に対して成立する。

小平の消滅定理の一般化を使うことにより、ぐちゃぐちゃに潰れた代数多様体を扱うことが可能になります。

- 小平の消滅定理の一般化の中の Y はぐちゃぐちゃに潰れた代数多様体でオッケーです。

従来の理論だと、多くの研究道具が穏やかな特異点をもった代数多様体でしか使えませんでした。応用の一つとして、以下の定理があります。

定理 4 (安定多様体のモジュライ空間の射影性)

安定多様体のモジュライ空間は射影的である。

これは安定多様体のモジュライ空間構成プロジェクトの完成を意味します。

よくある疑問、質問

よくある疑問、質問としては、

- 代数多様体の研究はなんの役に立つのか？
- 絵に描けない図形をどうやってイメージしているのか？
- どういったときにアイデアが浮かぶのか？
- なぜ数学の道を選んだのか？
- どうやったら数学者になれるのか？

最後に

数学に興味を持った高校生の方は、大学の数学科で一緒に研究しましょう！

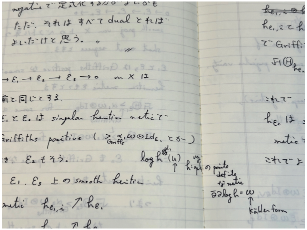


Figure: 研究ノート

ご静聴ありがとうございました。