Minimal model theory for log surfaces

Osamu Fujino

1　主定理

極小モデル理論:

X: 正規な複素射影曲面

Δ: X 上の有効な $\mathbb{Q}$-因子で係数は 1 以下

X は $\mathbb{Q}$-分解的、または、(X, Δ) は対数的標準、と仮定

$\Longrightarrow$ 対 (X, Δ) に対して極小モデル理論が完全に機能する。

つまり、(X, Δ) に対して錐定理が成立し、$K_X + \Delta$-負な端射線に付随する収縮射を有限回繰り返すことにより、極小モデルか森ファイバー空間に到達する。

2　アバンダンス定理と有限生成性

アバンダンス定理: $K_X + \Delta$ が数値的非負のとき、$K_X + \Delta$ は半豊富である。

対数的標準環の有限生成性:

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta)))$$

は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

3　有理特異点を許す曲面

曲面 X が高々有理特異点しか持たないとき、X は $\mathbb{Q}$-分解的であることが知られている。さらに、K_X-負な端射線に付随する収縮射 $\varphi : X \to Y$ を考えると、Y も高々有理特異点しか持たないことが示せる。したがって、

有理特異点を許した曲面の世界でも極少モデル理論は完全に機能する。

標準模型

$$\mathbf{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

が高々有理特異点しか持たないことも示せる。

4　消滅定理

主定理の証明は小平型の消滅定理の一般化に大きく依存している。

キーポイント:　X を非特異射影曲面、D を X 上の単純正規交叉因子とする。このとき、$\mathcal{O}_X(K_X+D)$ を $\Omega^2_X(\log D)$ と見るのではなく、

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-D), \mathcal{O}_X(K_X))$$

と見なし、$\mathcal{O}_X(-D)$ は複体

$$\Omega^\bullet_X(\log D)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(-D)$$

の 0 番目の項と見なす。

コンパクト台コホモロジーに付随するHodge–de Rham複体

$$H^q(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D)) \Rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus D, \mathbb{C})$$

の E_1-退化を使って小平型の消滅定理の一般化を証明する。E_1-退化はコンパクト台コホモロジーに入る混合Hodge構造の一般論から従う。

我々の消滅定理は川又–Viehweg–Nadel消滅定理より真に強力である。

5　一般化

Δ を $\mathbb{R}$-因子としても全く同様のことが示せる。

相対化: つまり、射影射 $f : X \to S$ という設定でも全く同様のことが示せる。

注意: 極小モデル理論の枠組みでの取り扱いなら、相対化や $\mathbb{R}$-因子の使用は困難ではない。

6　未解決問題

正標数の体上で主定理は成立するか？

(1) Kollár–Kovács の対数的標準特異点を許す曲面に対する極小モデル理論は正標数の体上でも成立する。

(2) 藤田による曲面のアバンダンス定理も正標数の体上でも成立する。

注意: 標数零のとき、我々の主定理は(1)、(2)より真に強いことを主張している。

注意: 我々の主定理の証明は小平型の消滅定理に依存しているので、そのままでは正標数化できない。