極小モデル理論と消滅定理

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
藤野 修

2008/9/25

目 次

1　導入

$$\text{Kollár–森「双有理幾何学」}$$
$$\Downarrow \text{Siu, Shokurov, et al.}$$
$$\text{最近の大発展：Birkar–Cascini–Hacon–McKernan}$$

1.1 大雑把に言うと、[BCHM] は Kollár–森の教科書の続きを書いた。

Kollár–森の「双有理幾何学」の2章と3章（極小モデル理論の基礎の部分）を書き直そう！というのが今日の話。Ambro: Quasi-log varieties が出発点。

1.2 「双有理幾何学」の2章と3章で説明されている極小モデル理論の枠組みを「古典的極小モデル理論」と呼び、今回の枠組みを「新極小モデル理論」と呼ぶことにすると、

$$\begin{array}{c}\text{古典的極小モデル理論：PURE}\\ \bigcap \\ \text{新極小モデル理論：MIXED}\end{array}$$

である。

以下すべて複素数体上で考えることにする。

2 錐定理

森による錐定理が極小モデル理論の出発点である。

定理 2.1 (錐定理) X を n 次元非特異射影多様体とする。このとき、$0 < -K_X \cdot C_j \leq n+1$ となるような高々可算無限個の有理曲線 $C_j \subset X$ で

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

を満足するものが存在する。

2.2 上の定理は基礎体の標数に関係なく成立する。証明は正標数の世界でフロベニウス写像を使うという画期的なものであった。

さらに3次元で以下の収縮定理も示した。

定理 2.3 (収縮定理) $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ を K_X-負な端射線とする。このとき、$\varphi_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ を満たす射影多様体への射 $\varphi : X \to Z$ のうち、既約曲線 $C \subset X$ に対しての条件「$\varphi(C) = (1\,\text{点}) \Leftrightarrow [C] \in R$」を満たすものが1つだけ存在する。$\varphi$ は R の収縮と呼ばれる。

2.4 φ が双有理写像であっても、Z は特異点を持ちうる。従って、極小モデル理論では特異点を持った多様体を扱う必要が生じる。

詳しくは「双有理幾何学」の1章を見よ。

3　対の特異点

3.1 X を正規代数多様体とする。B を X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする。さらに、$K_X + B$ は $\mathbb{Q}$-Cartier であると仮定する。

$f: Y \to X$ を特異点解消とし、$\mathrm{Exc}(f) \cup \mathrm{Supp} f_*^{-1} B$ は Y 上の単純正規交差因子とする。ただし、$\mathrm{Exc}(f)$ は f の例外集合で、$f_*^{-1}B$ は B の固有変換とする。

このとき

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_i a_i E_i$$

と書ける。ただし、$f_*(\sum_i a_i E_i) = -B$ なるように選んでおく。

定義 3.2
- $a_i > -1$ がすべての i に対して成立するとき、(X, B) は KLT であるという。
- $a_i \geq -1$ がすべての i に対して成立するとき、(X, B) は LC であるという。

3.3 KLT は川又対数的末端の略で、LC は対数的標準の略である。KLT は微分形式の二乗可積分条件とも見なせる。

terminal singularities

$\Downarrow$

canonical singularities

$\Downarrow$

KLT singularities

$\Downarrow$

LC singularities

3.4 コホモロジー論的な観点から見ると、KLTとLCの差は巨大である。この穴を埋めるために、log terminal singularitiesの亜種が大量に定義された。

purely log terminal,
divisorial log terminal,
weakly Kawamata log terminal,
log terminal

などなど。

3.5 「細かい定義が多過ぎる！」「専門家以外には分からない！」(中島啓さんなど)

$\Downarrow$

実は、専門家もよく分かっていない！

$\Downarrow$

What is log terminal?なる論文を読めばよい!?

次に定義するLC centerも大切な概念である。

定義 3.6 (LC center) (X, B)をLCとする。Xの閉部分集合CがLC centerであるとは、(X, B)のある特異点解消$f : Y \to X$が存在し、

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_{j \in J} a_j E_j$$

と書いたとき、$f(E_{j_0}) = C$かつ$a_{j_0} = -1$となる$j_0 \in J$が存在することとする。

3.7 Xを非特異とし、$B = \sum_i B_i$を単純正規交差因子とすると、LC centerとは$B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}$の既約成分のことである。

4　川又–Viehweg 消滅定理

ここで、小平消滅定理の一般化である川又–Viehweg 消滅定理を述べておく。

定理 4.1 **(川又–Viehweg 消滅定理)** X を非特異射影多様体とし、D は豊富な $\mathbb{Q}$-因子とする。D の分数部分 $\{D\}$ の台は X 上の単純正規交差因子とする。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \ulcorner D \urcorner)) = 0$$

が全ての $i > 0$ に対して成立する。ただし、$\ulcorner D \urcorner$ は D の切り上げである。

4.2 川又–Viehweg の消滅定理は様々な形で述べられているが、上の形が一番よく使われる形だと思う。

5 X-method

川又–Viehweg 消滅定理 + リーマン–ロッホの定理
$\Longrightarrow$ 非消滅定理

川又–Viehweg 消滅定理 + 非消滅定理
$\Longrightarrow$ 固定点自由定理

川又–Viehweg 消滅定理 + 非消滅定理
$\Longrightarrow$ 有理性定理

5.1 上の $\Longrightarrow$ で使われる議論が X-method と呼ばれる。結局、川又–Viehweg 消滅定理と X-method で古典的極小モデル理論の基本定理はすべて得られるのである。

有理性定理から錐定理がでる。さらに、固定点自由定理を使えば端射線に付随する収縮写像の存在を示せる。

基本的に、X-method は KLT 対に対する巧妙な次元による帰納法である。

6　新しいパッケージ

ここからは新極小モデル理論の話である。出発点はAmbro: Quasi-log varietiesである。

設定 6.1 Mを非特異代数多様体とし、YをM上の被約な単純正規交差因子とする。DはM上の$\mathbb{Q}$-因子で、$D=\sum d_iD_i$と書いたとき、全てのiに対してD_iはM上の素因子で、$0\leq d_i\leq 1$が成立するとする。さらに、DとYは共通成分を持たず、$\mathrm{Supp}(D+Y)$ はM上の単純正規交差因子とする。このとき$B=D|_Y$とおく。以下、対(Y,B)について考える。$\nu:Y'\to Y$をYの正規化とし、$K_{Y'}+B_{Y'}=\nu^*(K_Y+B)$とおくと、$(Y',B_{Y'})$はLCである。$Y$の既約成分と、$(Y',B_{Y'})$のLC centerの$Y$での像を$(Y,B)$の階層と呼ぶ。

6.2 $(M,Y+D)$はLCである。(Y,B)の階層とは、$(M,Y+D)$のLC centerでYに含まれるもののことである。

次の定理が川又–Viehweg 消滅定理の代わりとなる結果である。Ambro による定式化である。Kollár の定理の一般化になっている。

定理 6.3 (捻れ不在定理と消滅定理) (Y, B) は設定 6.1 の (Y, B) とする。$f : Y \to X$ を固有射とし、L を Y 上のカルティエ因子とする。さらに、$H \sim_{\mathbb{Q}} L - (K_Y + B)$ は f-半豊富と仮定する。 このとき、以下の２つの主張を得る。

(1) $R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)$ の全ての (零でない) 局所切断の台は、(Y, B) の幾つかの階層の f での像を含む。

(2) X を射影多様体とし、X 上の豊富な $\mathbb{Q}$-カルティエ $\mathbb{Q}$-因子 H' によって $H \sim_{\mathbb{Q}} f^* H'$ と書けるとする。このとき、すべての $p > 0$ と $q \geq 0$ に対して $H^p(X, R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)) = 0$ が成立する。

6.4 上の定理は相対化出来るし、$\mathbb{R}$-因子に対する一般化も出来る。また、「豊富」を「ネフかつ対数的巨大」なる性質に弱めることも出来る。

パッと見ただけでは分からないが、大抵の結果を特殊な場合として含んでいる。

7　キーポイント

証明のキーポイントを簡単に説明する。

定理 7.1 V を非特異射影多様体とし、Σ を V 上の単純正規交差因子とする。$\iota : V \setminus \Sigma \to V$ を自然な開埋め込み射とする。このとき自然な包含関係 $\iota_! \mathbb{C}_{V\setminus\Sigma} \subset \mathcal{O}_V(-\Sigma)$ は、全射

$$H^i_c(V \setminus \Sigma, \mathbb{C}) = H^i(V, \iota_! \mathbb{C}_{V\setminus\Sigma}) \to H^i(V, \mathcal{O}_V(-\Sigma))$$

を任意の i に対して引き起こす。

7.2 (証明の概略) $\iota_! \mathbb{C}_{V\setminus\Sigma}$ は複体 $\Omega^\bullet_V(\log \Sigma)\otimes\mathcal{O}_V(-\Sigma)$ と擬同型である。この複体からホッジ–ドラームのスペクトル系列をつくる。

$$E_1^{p,q} = H^q(V, \Omega^p_V(\log \Sigma)\otimes\mathcal{O}_V(-\Sigma)) \Rightarrow H^{p+q}_c(V\setminus\Sigma, \mathbb{C})$$

これが E_1 で退化することから定理は従う。

7.3 川又–Viehweg 消滅定理は純ホッジ構造の話で証明出来る。今回の新しい結果は、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造から従う。実際は、「可約で商特異点を持った多様体」上でコンパクト台コホモロジーを考える必要がある。

また、混合ホッジ構造の話に帰着させるまでの準備段階も、技術的にかなり面倒である。

7.4 証明のスケッチ。

コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造
から従う E_1 退化 (0)
$\Downarrow$(1)
単射性定理（省略）
$\Downarrow$(2)
捻れ不在定理と消滅定理

(0) はよく知られた話と思うが、目的に沿った形に書き直す必要がある。純粋にホッジ理論の話。

(1) は技術的にかなり面倒な部分である。特異点解消定理などの使い方が大変である。可約な多様体を扱わないといけないのが厄介な点である。

(2) はルーティーンワークである。多様体のコンパクト化、特異点解消定理などの細かい点のみ注意が必要。

8 LC に対する錐定理

新しいパッケージの応用の一つとして以下の定理をえる。

定理 8.1 (錐定理) (X, B) は LC で、X は射影多様体とする。このとき、

(1) $0 < -(K_X + B) \cdot C_j \leq 2 \dim X$ となるような高々可算無限個の有理曲線 $C_j \subset X$ で

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{(K_X+B) \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

を満足するものが存在する。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ と豊富な因子 H に対して、

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{(K_X+B+\varepsilon H) \geq 0} + \sum_{\text{有限本}} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

が成立する。

(3) $F \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ は (K_X+B)-負な端錐面とする。この時、$(\varphi_F)_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ を満たす射影多様体への射 $\varphi_F : X \to Z$ のうち、既約曲線 $C \subset X$ に対しての条件「$\varphi_F(C) = (1\,点) \Leftrightarrow [C] \in F$」を満たすものが 1 つだけ存在する。$\varphi_F$ は F の収縮と呼ばれる。

(4) 端錐面 F と射 $\varphi_F : X \to Z$ は (3) の通りとする。L は X 上の直線束で、$[C] \in F$ となる任意の曲線 C について $L \cdot C = 0$ を満たすようなものとする。このとき、Z 上の直線束 L_Z で $L \simeq \varphi_F^* L_Z$ となるものが存在する。

8.2 上の定理は今まではLCではなく、KLTに対して証明されていた。(1) の端射線の長さに関する評価は、現在のところ、[BCHM] の結果を使わないと証明出来ない。

9 Quasi-log varieties の理論

コホモロジーの新しいパッケージは、以下の「擬対数多様体」の理論のために考えだされた。

定義 9.1 (Qlc pairs) $[X, \omega]$ が qlc pair であるとは、以下の性質を満たすこととする。

- 固有全射 $f : Y \to X$ が存在する。ただし、(Y, B) は設定 6.1 の (Y, B) とする。
- $f^*\omega \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + B$ が成立する。ただし、ω は X 上の $\mathbb{Q}$-カルティエ因子である。
- $B = \sum_i b_i B_i$ と書いたとき、$b_i \leq 1$ が全ての i に対して成立する。
- $\mathcal{O}_X \simeq f_*\mathcal{O}_Y(\ulcorner -(B^{<1})\urcorner)$ が成立する。ただし、$B^{<1} = \sum_{b_i<1} b_i B_i$ である。

例 9.2 V をトーリック多様体とする。X を V のトーラス不変な閉部分集合とする。すると、$[V, 0]$ は自然な方法で qlc pair になる。

9.3 (なぜqlc pairsか？) 大雑把な説明である。

- (Z, Δ) をLCとする。すると、$[Z, K_Z + \Delta]$ は自然な方法でqlc pairと見なせる。(trivial)
- $\{C_i\}_{i\in I}$ を (Z, Δ) のLC centersの集合とする。$V = \bigcup_{i\in I} C_i$ と置くと、$[V, (K_Z+\Delta)|_V]$ も自然な方法でqlc pairになる。(hard)
- さらに、$[V, (K_Z+\Delta)|_V]$ の「qlc centers」の和集合も自然にqlc pairになる。(hard)

LCでは次元による帰納法は回らないが、qlcの世界では次元による帰納法が回る！

定理 9.4 (X,B) をLCとし、X を射影的とする。L を X 上のカルティエ因子で、$L-(K_X+B)$ は豊富とする。$\{C_j\}_{j\in J}$ を (X,B) のLC centersのいくつかの集合とする。X の閉部分集合 $V=\bigcup_{j\in J} C_j$ を考える。V には被約なスキーム構造をいれておく。このとき、

$$H^i(X,\mathcal{I}_V\otimes\mathcal{O}_X(L))=0$$

が全ての $i>0$ に対して成立する。ただし、$\mathcal{I}_V$ は V の X 上での定義イデアルである。特に、制限写像

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(L))\to H^0(V,\mathcal{O}_V(L))$$

は全射である。

川又–Viehwegの消滅定理に依存した古典的極小モデル理論のテクニックや L^2 理論では到達出来なかった定理である。

9.5 LC対 (X,B) をqlc対 $[X,\omega]$ に変え、$\{C_j\}_{j\in J}$ をqlc centersの集合としても、全く同じことが成立する。ここがミソである。次元による帰納法が回るようになるのである！

上の定理の特殊な場合として、以下をえる。

例 9.6 X を射影的なトーリック多様体とし、L を X 上の豊富因子とする。Y をトーラス不変な X の閉部分集合とする。このとき、

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(L))$$

は全射である。

実はトーリック多様体の場合は、Hodge 理論も組み合わせ論的な議論もなにも使わずに簡単に証明出来る。詳しくは

- Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties
- Vanishing theorems for toric polyhedra

を見よ。

10　LC 対についての MMP

LC に対して錐定理が証明出来たので、以下の予想が解ければ LC 対について MMP が機能する。

予想 10.1 LC フリップは存在するか？

KLT に対してはフリップの存在問題は [BCHM] で解決済み。

予想 10.2 LC フリップの無限列は存在しない？

KLT フリップの無限列が存在しないことを証明すれば、LC フリップの無限列が存在しないことも示せる。未解決。

予想 10.3 LC 対の対数的標準環は有限生成か？

これが一番大切な予想かもしれない。これは特殊な場合として LC フリップの存在問題も含んでいる。4 次元以下で解決済み。

10.4 LC フロップは一般には存在しないことが分かっている。また、$\mathbb{Q}$-分解性のような性質が LC の研究には意外と障害になるような気もする。

11　今後に向けて

川又–Viehweg 消滅定理、X-method

(pure Hodge structures)

$\Downarrow$

新しいパッケージ, quasi-log varieties

(mixed Hodge structures)

canonical bundle formula

(VHS)

$\Downarrow$

log canonical bundle formula ??

(VMHS)

L^2-method

(Ohsawa–Takegoshi L^2 extension theorem,

Skoda's division theorem, etc.)

$\Downarrow$

"mixed" L^2-method ???

参考文献

[1] F. Ambro, Quasi-log varieties, Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.

[2] F. Ambro, A. Corti, O. Fujino, C. Hacon, J. Kollár, J. McKernan, H. Takagi, *Flips for* 3*-folds and* 4*-folds*, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[3] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, preprint 2006.

[4] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, preprint 2008.

[5] 藤野修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌「数学」に掲載決定.

[6] V. V. Shokurov, Prelimiting flips, Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 75–213.

[7] Y.-T. Siu, Invariance of plurigenera, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.