小平消滅定理の一般化と双有理幾何学への応用

藤野　修

京都大学

2022 年 3 月 30 日

1. はじめに
2. 小平消滅定理とその一般化
3. 極小モデル理論の混合化
4. さらなる発展

はじめに

- 〇〇予想の解決！というような話はありません。
- 極小モデル理論の流行の話題（Birkar の BAB 予想の解決など）とは無関係の話です。
- 私の目標：理論の一般化、簡略化、厳密化を究極まで追求する！
- カテゴリーやスタックなど難しい話は出てきません！
- 私の研究は、古典的（伝統的？）な代数多様体論です。
- $K3$、ファノ多様体、Calabi–Yau のようなものも出てきません！

小平消滅定理とその一般化

定理 1 (複素射影多様体に対する小平消滅定理)

X を非特異複素射影多様体とし、$\mathcal{L}$ を豊富な直線束とする。このとき、

$$H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}) = 0$$

がすべての $i > 0$ に対して成立する。ただし、ω_X は X の標準束とする。

- 小平消滅定理は元々コンパクト複素多様体とその上の正な直線束について証明された。
- 小平の埋め込み定理と Serre の GAGA 原理を使うと定理 1 はオリジナルの小平消滅定理と同値であることがわかる。
- 射影多様体に対する小平消滅定理は様々な方法で証明できる。調和積分論、$\bar{\partial}$-方程式、Morse 理論、Hodge 理論など。

小平消滅定理の様々な一般化の例

- **秋月–中野消滅定理** (調和積分論、Bochner トリック、解析的)
- Grauert–Rimenschneider **消滅定理** (解析的)
- **川又**–Viehweg **消滅定理** (Viehweg のアプローチは Hodge 理論的)
- Kollár **単射性定理、捻れ不在定理、消滅定理** (Hodge 理論的)
- Nadel **消滅定理** ($\bar{\partial}$-方程式、解析的)

♡ 伝統的な極小モデル理論の一般論はほぼ**川又–Viehweg 消滅定理**と**広中の特異点解消定理**の応用と見なせる。

♡ 代数的な Nadel 消滅定理は川又–Viehweg 消滅定理とともに高次元代数多様体論の主要な研究道具である。

定理 2 (Kollár の定理)

$f\colon X \to Y$ を非特異射影多様体 X から射影多様体 Y への全射とする。このとき、以下の主張が成り立つ。

(i) $R^i f_* \omega_X$ は捻れを持たない。

(ii) $\mathcal{A}$ を Y 上の豊富直線束とすると、$H^i(Y, \mathcal{A} \otimes R^j f_* \omega_X) = 0$ が任意の $i > 0$ について成立する。

- (i) は Kollár の torsion-freeness と呼ばれる。
  Grauert–Riemenschneider 消滅定理の一般化にもなっている。
- (ii) は Kollár の消滅定理と呼ばれる。$X = Y$ で f を恒等射とすると、射影多様体に対する小平の消滅定理を復元する。
- Kollár による証明は Hodge 理論を使う。

定理 3 (Kollár の単射性定理)

X を非特異射影多様体とし、$\mathcal{L}$ を半豊富直線束とする。ここで $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) \setminus \{0\}$ とすると、$\otimes s$ が引き起こす射

$$\times s\colon H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}) \to H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes (k+l)})$$

は単射である。ただし、k と l は任意の正の整数とする。

- 上の定理は Tankeev の定理の一般化として得られた。
- 定理 2 と定理 3 は同値であることが示せる。
- 複による調和積分論を使った定理 3 の証明は驚くほど簡単である。
- 定理 3 は Hodge-to-de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} := H^q(V, \Omega_V^p) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbb{C})$$

の E_1-退化にしたがう。ただし、V は非特異射影多様体とする。

Kollár の定理の一般化として以下の定理が証明できる。

定理 4 (Esnault–Viehweg、Ambro、Fujino)

$f\colon X\to Y$ を非特異射影多様体 X から射影多様体 Y への全射とし、D を X 上の単純正規交叉因子とする。このとき以下が成り立つ。

(i) $R^i f_*\omega_X(D)$ の随伴素イデアルは Y の生成点か D の**階層**の f での像の生成点である。

(ii) $\mathcal{A}$ を Y 上の豊富直線束とすると、$H^i(Y, \mathcal{A}\otimes R^j f_*\omega_X(D)) = 0$ が任意の $i>0$ について成立する。

- $D=\sum_{i\in I} D_i$ を D の既約分解とする。D の**階層** W とは、$D_{i_1}\cap\cdots\cap D_{i_k}$ の既約成分のことである。ただし、$\{i_1,\cdots,i_k\}\subset I$ である。
- 定義から、

W は D の**階層** $\Leftrightarrow W$ は (X,D) の**対数的標準中心** (あとで定義する)

定理 5 (Esnault–Viehweg、Ambro、Fujino)

X を非特異射影多様体、D を X 上の単純正規交叉因子、$\mathcal{L}$ を半豊富直線束とする。ここで $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) \setminus \{0\}$ とし、$(s = 0)$ は D の階層を含まないと仮定する。このとき、$\otimes s$ が引き起こす射

$$\times s \colon H^i(X, \omega_X(D) \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}) \to H^i(X, \omega_X(D) \otimes \mathcal{L}^{\otimes (k+l)})$$

は単射である。ただし、k と l は任意の正の整数とする。

- 定理 4 と定理 5 は同値である。
- 定理 5 は Hodge-to-de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} := H^q(V, \Omega_V^p(\log \Sigma)(-\Sigma)) \Rightarrow H_c^{p+q}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

の E_1-退化からしたがう。ただし、V は非特異射影多様体で Σ は単純正規交叉因子とする。

伝統的なアプローチでは

$$\omega_X(D) = \bigwedge^{\dim X} \Omega^1_X(\log D)$$

と解釈するのが普通であった。(Deligne、Iitaka など) キーポイントは

$$\omega_X(D) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-D), \omega_X)$$

を使い、

$$\mathcal{O}_X(-D) = \Omega^0_X(\log D)(-D)$$

でコンパクト台コホモロジーの混合ホッジ構造の話に持ち込む! 正しい対象は

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D)(-D)) \Rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

で

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(X \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

ではない！幾何学への応用を考えるともっと一般的な設定で考える方がよい。

定義 6 (単純正規交叉対)

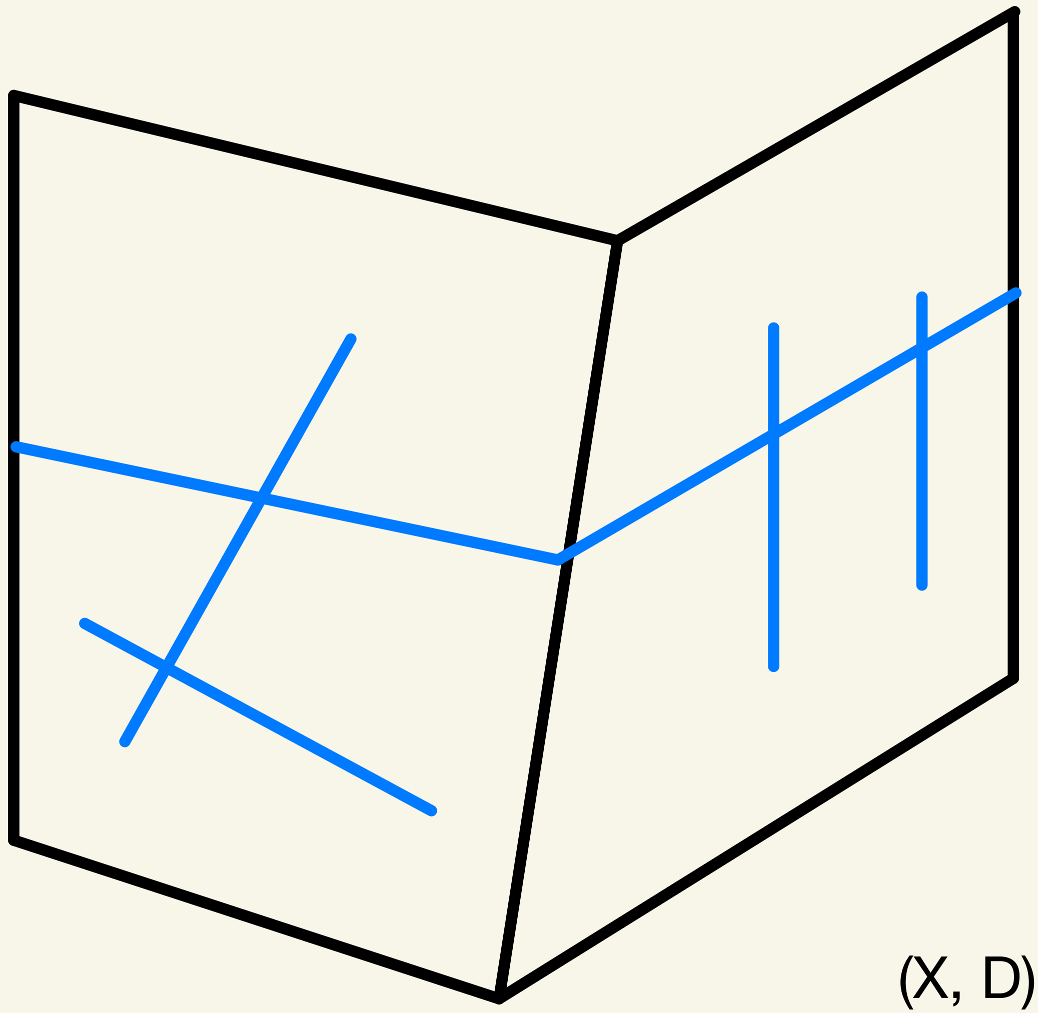
X は非特異多様体 M 上の単純正規交叉因子とし、B を M 上の $\mathbb{R}$-因子で B と X は共通成分を持たず、$\mathrm{Supp}(B+X)$ は単純正規交叉因子になるものとする。このとき、$(X, D := B|_X)$ を**大域的に埋め込まれた単純正規交叉対**という。
(X, D) が Zariski 位相で局所的に大域的に埋め込まれた単純正規交叉対と同型なるとき、(X, D) を**単純正規交叉対**と呼ぶ。

定義 7 (階層)

(X, D) を単純正規交叉対とする。$\nu\colon X^\nu \to X$ を X の正規化とし、

$$K_{X^\nu} + \Theta := \nu^*(K_X + D)$$

と置く。W を X の閉部分多様体とする。W が X の既約成分か (X^ν, Θ) の対数的標準中心の ν での像に一致するとき、W を (X, D) の**階層** (stratum) と呼ぶ。



(X, D)

定理 8 (...、Fujino)

(X, Δ) を単純正規交叉対とし、$f\colon X \to Y$ を固有射とする。Δ の係数は 0 以上 1 以下とする。L を X 上のカルティエ因子とし、$L - (K_X + \Delta)$ を f-半豊富と仮定する。このとき

(i) $R^q f_* \mathcal{O}_X(L)$ の任意の随伴素イデアルは、(X, Δ) のある階層の f での像の生成点である。

(ii) さらに $\pi\colon Y \to Z$ は射影射と仮定し、

$$L - (K_X + \Delta) \sim_{\mathbb{R}} f^* H$$

と仮定する。ただし、H は π-豊富な Y 上の $\mathbb{R}$-因子と仮定する。このとき、

$$R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{O}_X(L) = 0$$

が任意の $p > 0$ と q に対して成立する。

- 定理 8 は Kollár の定理 2 やその一般化である定理 4 も一般化している。
- 定理 8 の証明は以下の通りである。コンパクト台コホモロジーに入る混合 Hodge 構造を用いて単射性定理の一般化（定理 5 のさらなる一般化）を証明する。単射性から定理 8 を示す部分はルーティンワークである。
- 幾何学への応用を考えると、$\mathbb{R}$-因子を考えることは必要不可欠。
- X は非特異ではなく、単純正規交叉多様体にしている部分が幾何学への応用を考えた場合に非常に重要。
- 以上の話は 2006 年から 2007 年にかけて証明した話なので、何度も講演で聞かされている人も多いかと思いますが。(2008 年の秋の学会での特別講演、タイトルは『極小モデル理論と消滅定理』、2015 年の城崎シンポジウム、など)

極小モデル理論の混合化

極小モデル理論の基本的対象物は以下の通りである。

定義 9 (KLT と LC)

X を正規代数多様体とし、Δ を X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子とする。さらに $K_X + \Delta$ は $\mathbb{R}$-カルティエと仮定する。$f\colon Y \to X$ を特異点解消とし、

$$K_Y + \Delta_Y := f^*(K_X + \Delta)$$

と書く。

- すべての $f\colon X \to Y$ に対して Δ_Y の係数が < 1 となるとき、(X, Δ) を KLT という。
- すべての $f\colon X \to Y$ に対して Δ_Y の係数が ≤ 1 となるとき、(X, Δ) を LC という。

- KLT は kawamata log terminal（川又対数的端末）の略である。
- LC は log canonical（対数的標準）の略である。

例 10 (KLT と LC の例)

X を非特異射影多様体とし、$\Delta = \sum_i a_i \Delta_i$ とする。$\operatorname{Supp} \Delta$ は単純正規交叉因子とする。このとき、

- $0 \leq a_i < 1$ がすべての i で成立 $\Leftrightarrow$ (X, Δ) は KLT
- $0 \leq a_i \leq 1$ がすべての i で成立 $\Leftrightarrow$ (X, Δ) は LC

極小モデル理論で重要な役割を果たすのは、対数的標準中心なる概念である。

定義 11 (対数的標準中心)

(X, Δ) を LC とする。特異点解消 $f \colon Y \to X$ と Y 上の因子 E が存在し、Δ_Y 内の E の係数が 1 とする。このとき、$W := f(E)$ を (X, Δ) の**対数的標準中心**という。ただし、$K_Y + \Delta_Y = f^*(K_X + \Delta)$ である。

代数多様体の退化やモジュライ空間のコンパクト化を論じるには以下の対象も重要である。

定義 12 (SLC)

X を等次元的なスキームで Serre の S_2 条件を満たし、余次元 1 で正規交叉とする。Δ は X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子で Δ の台は X の余次元 1 の特異点部分を含まないと仮定する。さらに $K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-カルティエで LC と同様の条件を満たすとする。このとき (X, Δ) は SLC と呼ばれる。

- SLC は semi-log canonical（半対数的標準）の略である。
- SLC は点付きノーダル曲線の高次元化である。
- 正規交叉多様体は SLC である。
- Whitney の傘 $(x^2 - zy^2 = 0) \subset \mathbb{C}^3$ も SLC である。

- 伝統的な極小モデル理論は基本的に KLT についての理論
- Birkar–Cascini–Hacon–M[c]Kernan （通称 BCHM）は KLT について極小モデル理論の大半を完成させた
- Birkar による BAB 予想の解決などもちろん KLT についての結果
- KLT はもともと川又によって川又–Viehweg 消滅定理がうまく適用できる対象として導入された
- BCHM も BAB 予想の解決も川又–Viehweg 消滅定理が主要な道具の一つ
- 川又–Viehweg 消滅定理が適用できないので KLT より悪い特異点を持つ対象ではコホモロジー論的手法は難しいと思われていた
- 現在は大方の予想に反して KLT より悪い特異点を持った対象である LC や SLC や Quasi-log schemes なる対象でも一般論が楽に展開できている **（ここが私の仕事！）**

Quasi-log schemes の定義を雑に述べる。

定義 13 (Quasi-log schemes)

X をスキーム、$X_{-\infty} \subsetneq X$ を X の閉部分スキーム、ω を X 上の $\mathbb{R}$-カルティエ因子とする。さらに大域的に埋め込まれた単純正規交叉対 (Y, B_Y) からの固有射 $f\colon (Y, B_Y) \to X$ が存在し、以下を満たすとする。

(1) $f^*\omega \sim_{\mathbb{R}} K_Y + B_Y$

(2) 自然な射 $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y(\lceil -(B_Y^{<1}) \rceil)$ は同型

$$\mathcal{I}_{X_{-\infty}} \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_Y(\lceil -(B_Y^{<1}) \rceil - \lfloor B_Y^{>1} \rfloor)$$

を引き起こす。ただし、$\mathcal{I}_{X_{-\infty}}$ は $X_{-\infty}$ の定義イデアルとする。

このとき、$[X, \omega]$ を quasi-log scheme と呼ぶ。$X_{-\infty} = \emptyset$ のときは $[X, \omega]$ は QLC と呼ぶ。

$(X, \omega, f\colon (Y, B_Y) \to X)$ を quasi-log scheme と呼ぶ方が正確だと思う。

- (X, Δ) を LC とすると、$[X, K_X + \Delta]$ は自然に QLC になる。(ほぼ自明。)
- (X, Δ) を LC とする。$\{W_i\}_{i \in I}$ を (X, Δ) の対数的標準中心全体の集合とする。このとき、任意の $J \subset I$ に対し、$W := \bigcup_{i \in J} W_i$ とおくと、$[W, (K_X + \Delta)|_W]$ も自然に QLC になる。(quasi-log schemes に対する adjunction)
- (X, Δ) を擬射影的な SLC とすると、$[X, K_X + \Delta]$ は自然に QLC と見なせる。(とても非自明。)

これから、LC も SLC も対数的標準中心の有限個の和集合も全て QLC として扱えることが分かる。もちろん、KLT も QLC である。QLC は様々な操作で閉じているが、その証明には定理 8 がしばしば必要になる。

定理 14 (Ambro、Fujino)

錐定理、収縮定理、小平型の消滅定理など、極小モデル理論の基本的な結果はすべて QLC に対して証明できる。

- quasi-log schemes は約 20 年前に Ambro によって quasi-log varieties なる名前で導入された。（最初のプレプリントでは generalized log varieties と呼ばれていた！）
- Ambro の論文は 20 ページの論文で非常に難解（消滅定理に関しては 2 ページだけ！）
- quasi-log については Ambro の論文以外は私の関わった論文しか存在しない

系 15 (Fujino)

錐定理、収縮定理、小平型消滅定理が SLC に対して成立する。

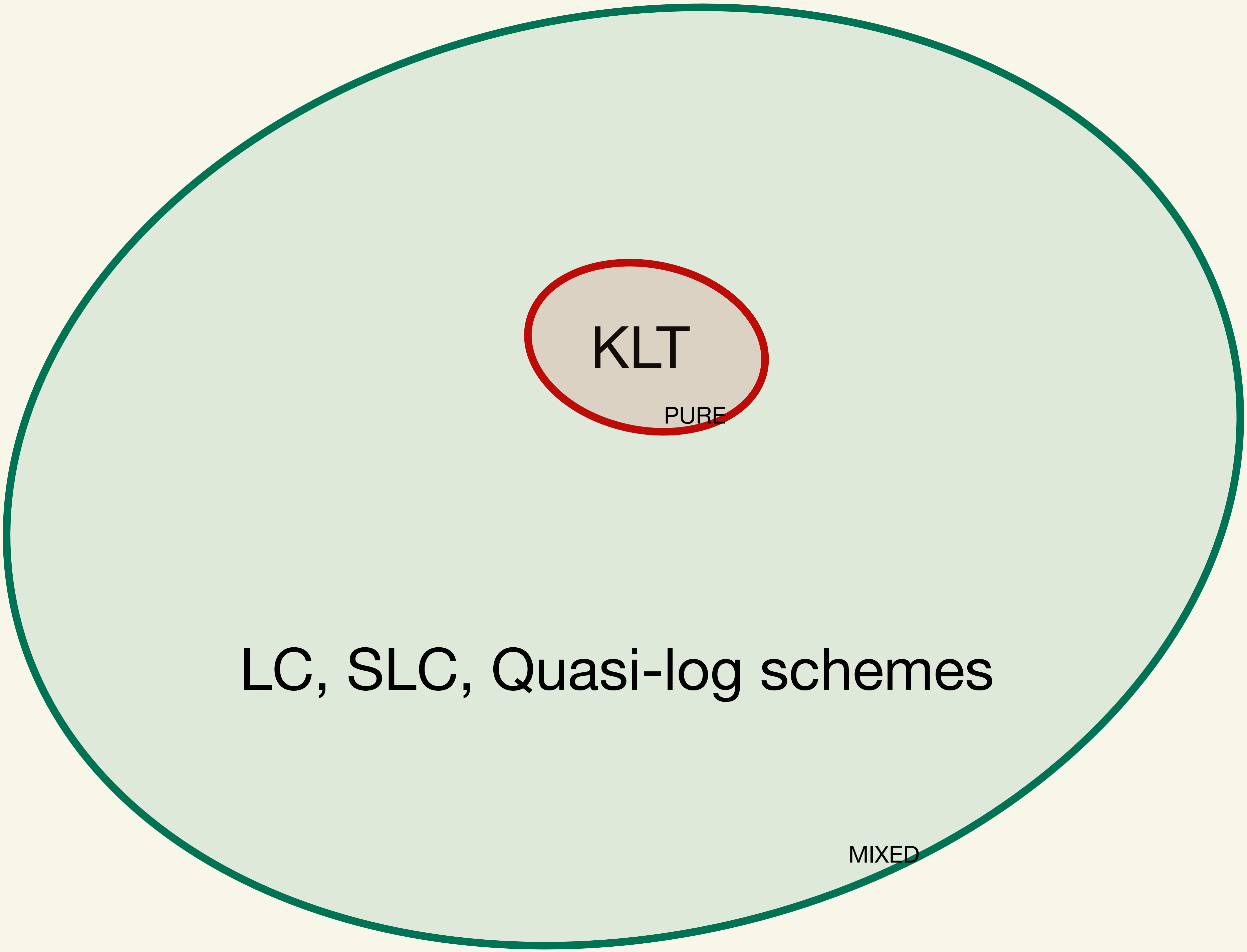
結局、Hodge 理論的な観点からすると、以下の対応が確立できたことになる。

$$\boxed{\text{KLT}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{純ホッジ構造}}$$

上の対応は明示的には述べられてこなかったが、驚くべきことではない。この対応を混合化したものが以下の対応である。

$$\boxed{\text{Quasi-log schemes}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{混合ホッジ構造}}$$

- ここまでの話も大半は 2007 年から 2008 年あたりに得られた話。
- LC についての極小モデル理論の基本定理たちについては quasi-log schemes を使わない非常に簡単な別のアプローチもある。(これも私の結果。結果は強力になっている上、証明は簡単になっていると言うお話。今回の消滅定理の応用。)


KLT
PURE
LC, SLC, Quasi-log schemes
MIXED

さらなる発展

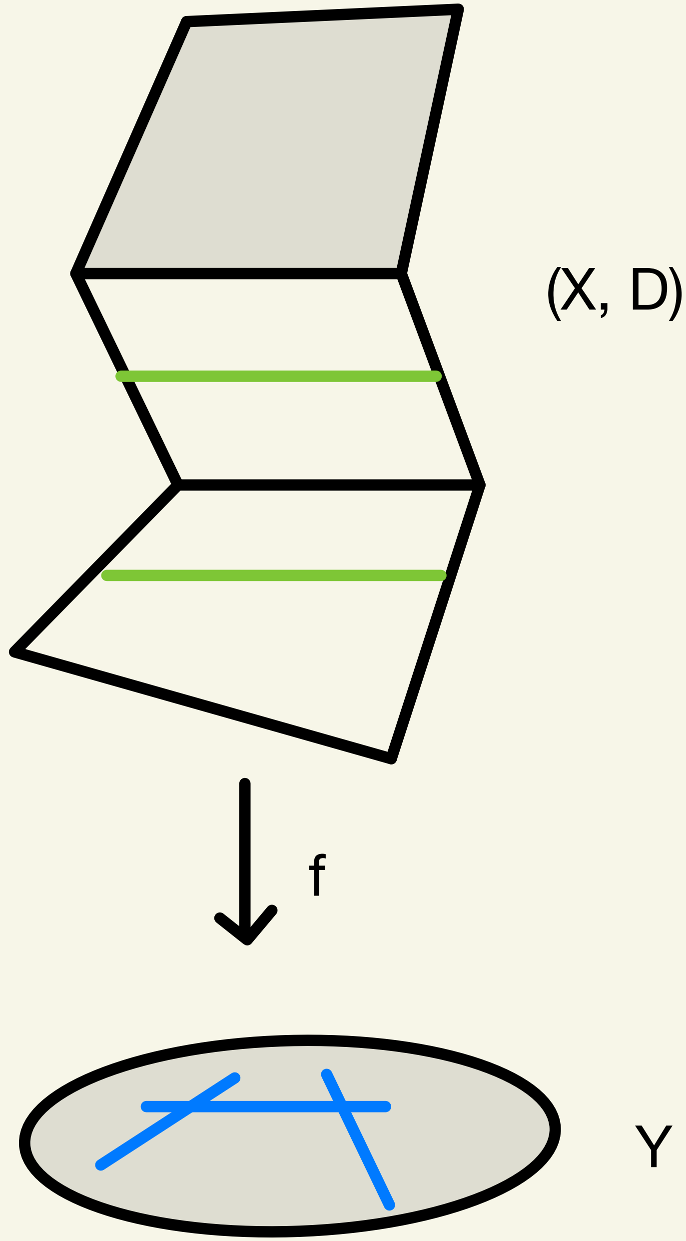
混合ホッジ構造の変動の利用

現在は混合ホッジ構造の変動の理論も quasi-log schemes の理論などに自然に組み込まれている。 (本当に話したかったのはこちらの話！)

定理 16 (Fujino–Fujisawa)

(X, D) を単純正規交叉対とし、D は被約とする。$f\colon X \to Y$ を非特異射影多様体 Y への射影射とし、(X, D) の任意の階層は Y 上支配的とする。Y 上に単純正規交叉因子 Σ が存在し、(X, D) の任意の階層は $Y^* := Y \setminus \Sigma$ 上滑らかと仮定する。さらに $R^{d-i}(f|_{X^*\setminus D^*})_!\mathbb{Q}_{X^*\setminus D^*}$ の Σ 周りの局所モノドロミーは全てユニポテントと仮定する。ただし、$d := \dim X - \dim Y$、$X^* := f^{-1}(Y^*)$、$D^* := D|_{X^*}$ である。このとき、$R^i f_*\omega_{X/Y}(D)$ は局所自由で半正値である。

- よく知られた Fujita–Zucker–Kawamata の結果の一般化である。
- Fujino–Fujisawa–Saito による混合ホッジ加群を使ったアプローチもある。


(X, D)
f
Y

混合ホッジ構造の変動まで取り込むことにより、以下の結果たちが得られている。(一つずつ 1 時間講演したい内容です。)

- 安定多様体のモジュライ空間の射影性の確立(Kollár の計画の完成)
- QLC なら Du Bois 特異点しか持たない(Kollár の予想の究極の一般化の完全解決。Haidong Liu 氏との共同研究)
- 低次元での藤田予想の精密化(Haidong Liu 氏との共同研究)
- 森双曲性についての Svaldi の問題の完全解決
- 端射線の長さの評価の精密化(Kenta Hashizume 氏との共同研究)
- 対数的標準中心に関する随伴と逆随伴の完全解決(Kenta Hashizume 氏との共同研究)
- Reid–Fukuda 型の固定点自由化定理の完全解決

など。

極小モデル理論の解析化

KLT の世界が内容豊富なのは以下の対応があるからであろう。

$$\boxed{\text{KLT}} \Longleftrightarrow \boxed{L^2 \text{ 条件}}$$

この対応を念頭におくと、

- KLT に関する各種消滅定理などを複素解析的設定に一般化できる。(一部は Shin-ichi Matsumura 氏との共同研究)
- BCHM を複素解析空間の間の射影射にまで一般化できる。(プレプリント公表済み)
- 今回話した消滅定理なども複素解析空間の間の射影射にまで一般化できたと思っている。(今までのアプローチが全部失敗したので、今回は別のアプローチを実行したつもり。)

解析化の話はまた別の機会に話したい。

ご静聴ありがとうございました。